§ 6 Vierfeldertafel

Der Verkehrsverband einer bayrischen Großstadt hat eine Befragung von 1.200 Fahrgästen durchgeführt. Das Ergebnis wurde in folgender Tabelle veröffentlicht.

	Dauerkarte	keine Dauerkarte	Summe
Männlich	216	472	688
Weiblich	293	219	512
Summe	509	691	1200

Welche Informationen kann man nun dieser Tabelle entnehmen?
Bei der Befragung wurden zwei sich gegenseitig ausschließende Merkmale untersucht.
Geschlecht des Fahrgastes: M (Männlich) oder $\overline{\text{M}}$ (Weiblich)
Besitzt der Fahrgast eine Dauerkarte: D (Gast besitzt eine Dauerkarte) oder $\overline{\text{D}}$ (Gast besitzt keine Dauerkarte)

Die einzelnen Zahlenwerte sagen dabei folgendes aus:
Die Anzahl der männlichen Dauerkartenbesitzer beträgt 216. Dagegen haben 472 Männer keine Dauerkarte.
293 Frauen besitzen eine Dauerkarte und 219 haben keine Dauerkarte.
Insgesamt gibt es 509 Dauerkartenbesitzer und 691 der befragten Fahrgäste haben keine Dauerkarte.
688 der Befragten sind männliche Fahrgäste. 512 Fahrgäste sind weiblich.
Insgesamt wurden 1.200 Fahrgäste befragt.

Die vier Zahlen in der Mitte der Tabelle besitzen, da sie einen Bezug zwischen zwei Merkmalen herstellen, die größte Aussagekraft. Daher nennt man diese Tabelle eine Vierfeldertafel.

	Dauerkarte	keine Dauerkarte	Summe
Männlich	216	472	688
Weiblich	293	219	512
Summe	509	691	1200

Zwischen den Zahlen in einer Zeile bzw. Spalte gilt folgender Zusammenhang:

- Die Zahl in der rechten Spalte entspricht der Summe der beiden Zahlen links davon

	Dauerkarte	keine Dauerkarte	Summe
Männlich	216	+ 472 =	688
Weiblich	293	+ 219 =	512
Summe	509	+ 691 =	1200

- Die Zahl in der letzten Zeile entspricht der Summe der beiden Zahlen darüber.

	Dauerkarte	keine Dauerkarte	Summe
Männlich	216 +	472 +	688 +
Weiblich	293 =	219 =	512 =
Summe	509	691	1200

Entscheiden Sie, welche Zahlenwerte und wie viele aus obiger Tabelle mindestens angegeben werden müssen um diese vollständig auszufüllen?

Es müssen mindestens vier Zahlen gegeben sein, wobei wenigstens eine Zahl aus der Vierfeldertafel sein muss, damit die Tabelle vollständig ausgefüllt werden kann.

Anstelle der absoluten Häufigkeiten können in obiger Tabelle auch die relativen Häufigkeiten (bzw. Wahrscheinlichkeiten) notiert werden. Rundet man auf 3 Dezimalstellen, so erhält man folgende Tabelle:

	Dauerkarte	keine Dauerkarte	Summe
Männlich	0,180	0,393	0,573
Weiblich	0,244	0,183	0,427
Summe	0,424	0,576	1

Zwischen den Zahlen in einer Zeile bzw. Spalte gilt folgender Zusammenhang:

Zeilenregel:
Der Wert in der letzten Spalte ergibt sich als Summe der beiden Werte links davon.

Spaltenregel:
Der Wert in der letzten Zeile ergibt sich als Summe der beiden Werte darüber.

Letzte Zeile, letzte Spalte:
Hat den Wert 1 oder entspricht einer Gesamtanzahl.

Entscheiden Sie, welche und wie viele Zahlenwerte aus obiger Tabelle mindestens angegeben werden müssen um diese vollständig auszufüllen?

Es müssen mindestens drei Werte (relative Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten) gegeben sein, wobei wenigstens ein Wert aus der Vierfeldertafel sein muss, damit die Tabelle vollständig ausgefüllt werden kann.

Zusammenfassung:
Die Vierfeldertafel ist ein übersichtliches Hilfsmittel in der Stochastik, um Zusammenhänge zwischen zwei Ereignissen (Merkmalen) in einer Tabelle darzustellen.

Füllen Sie die beiden Tabellen (Vierfeldertafeln) vollständig aus

	A	$\overline{A}$	
B		45	285
$\overline{B}$		135	
	270		

	A	$\overline{A}$	
B			0,55
$\overline{B}$		0,15	
	0,7		

Beispiel 1:
In einer Disco mit 1000 Gästen beträgt der Frauenanteil 40%. 45% der Gäste haben schon einen festen Partner. Jedoch sind 7 von 10 Männern noch Single.
Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel und bestimmen Sie damit, wie viele Frauen Single sind. Wie groß ist ihr Anteil unter den Frauen?

Definition der beiden Merkmale:
F: Person ist eine Frau
S: Person ist Single

$0,40 \cdot 1000 = 400$

	S	$\overline{S}$	
F	130	270	400
$\overline{F}$	420	180	600
	550	450	1000

$\frac{7}{10} \cdot 600 = 420$

$0,45 \cdot 1000 = 450$

Insgesamt sind 130 Frauen in der Disco Single.

Somit beträgt ihr Anteil unter den Frauen: $p = \frac{130}{400} = 0,325 = 32,5\%$

Also sind fast doppelt so viele Männer Single als Frauen!

Aufgaben

1. Ein Sportverein möchte mehr Mitglieder werben. Um herauszufinden, wie das Sporttreiben im Verein bei den Leuten ankommt, gibt der Vereinschef eine Umfrage in Auftrag. Hier das Ergebnis:
   Es wurden 600 Jugendliche befragt. 120 von ihnen sind Mitglied in einem Sportverein, davon sind 72 Jungen. 144 Jungen sind kein Mitglied eines Sportvereins.

   Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel und bestimmen Sie damit die Anzahl der Mädchen, die nicht Mitglied eines Sportvereins sind.
   Entscheiden Sie auch, ob es „wahrscheinlicher“ ist, dass ein Junge oder ein Mädchen Mitglied eines Vereins ist.

   J: Junge
   M: Mitglied

	J	$\overline{J}$	
M			
$\overline{M}$			

2. In München findet ein Casting-Wettbewerb zum BSDS statt. Dabei müssen ein Mann und eine Frau immer zufällig zusammen im Duett singen. Bei den Männern gelingt ein Auftritt in 65% der Fälle nicht. Bei jedem vierten Auftritt singen beide Sänger gut. Von den Frauen singen insgesamt 55 von 100 gut.
   Stellen sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auftritt sowohl von Seiten der Frauen, als auch von Seiten der Männern nicht gelingt.

			1

3. Die 30 Schüler der F13T haben Kurzarbeit in Physik geschrieben. Darunter waren 15 Schüler, die immer die Hausaufgaben gemacht haben. Insgesamt haben 15 Schüler eine Note besser als 5. 12 Schüler, welche regelmäßig die Hausaufgaben machten, haben auch eine Note besser als 5 erzielt.
   Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel und bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Schüler keine Hausaufgaben gemacht hat und keine bessere Note als 5 hat?
   Nehmen Sie auch begründet Stellung zu der Aussage: „Es lohnt sich die Hausaufgaben zu machen“.

			1

4. Nach der Einführung eines neuen Grippeimpfstoffs wird dieser in einer Studie mit 1000 Teilnehmer überprüft. 55% der Studienteilnehmer ließen sich impfen. Im Nachhinein stellte sich heraus, dass insgesamt 200 der Teilnehmer an Grippe erkrankten und davon 25% geimpft waren.

   Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel und bestimmen Sie, wie viele Personen nicht geimpft waren und auch nicht an Grippe erkrankten.
   Nehmen Sie Stellung zu der Aussage: „Impfen schützt vor Grippe“

			1

5. Ordnen Sie allgemein die gegebenen Wahrscheinlichkeiten den einzelnen Zellen der Vierfeldertafel zu

	A	$\overline{A}$	
B			
$\overline{B}$			

$1;\ P(A\cap B);\ P(A\cap\overline{B});\ P(\overline{A}\cap\overline{B});\ P(B);\ P(\overline{A});\ P(\overline{A}\cap B);\ P(A);\ P(\overline{B})$

6. An einer Prüfung haben 360 Studenten teilgenommen. 40% der Prüflinge sind Raucher, 65% Studenten haben die Prüfung bestanden. Von den Nichtrauchern haben 150 die Prüfung bestanden.

   Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel und bestimmen Sie den Anteil der Studenten, die rauchen und die Prüfung nicht bestanden haben.
   Nehmen Sie Stellung zu der Aussage: „Raucher schneiden bei Prüfungen schlechter ab.“

			1

7. Untersuchungen zeigen, dass 10 % aller Kinder Karies, 16 % Haltungsschäden und 4 % sowohl Karies wie auch Haltungsschäden haben.
Fertigen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten an und bestimmen Sie
- den Anteil der Kinder die Gesund sind.
- den Anteil der Kinder, die nur eine „Krankheit“ haben.

			1

8.0 In einem Betrieb sind 60% Männer beschäftigt. Von den Betriebsangehörigen sind 30% Raucher. 20% der Betriebsangehörigen sind weibliche Raucher.
Folgende Bezeichnungen für Ereignisse werden festgelegt:
M: Ein Betriebsangehöriger ist männlich.
R: Ein Betriebsangehöriger ist Raucher.
Zunächst werden die durch Verknüpfung der Ereignisse M und R entstandenen Ereignisse A und B betrachtet:

$$A = M \cup \overline{R}$$
$$B = \overline{\overline{M} \cap R}$$

8.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B mit Hilfe einer Vierfeldertafel und formulieren Sie die Ereignisse A und B im Sinne der vorliegenden Thematik.

			1

9.0 Bei umfangreichen Verkehrszählungen in einer Großstadt wurden Zusammenhänge zwischen der Anzahl der vorbeifahrenden Pkws bzw. Lkws und dem Geschlecht der am Steuer sitzenden Person festgestellt. Im folgenden werden nur diese beiden Fahrzeugarten betrachtet. Die dabei ermittelten relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.
Nach dem Ergebnis der Zählung handelt es sich bei 20% der betrachteten Fahrzeuge um Lkws. Je 31 von 100 der am Steuer eines Fahrzeugs sitzenden Personen sind weiblichen Geschlechts. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem zufällig herausgegriffenen Auto um einen von einer Dame gesteuerten Pkw handelt beträgt 0,28.
Folgende Bezeichnungen für Ereignisse werden festgelegt:
L: „Das Fahrzeug ist ein Lkw“
D: „Das Fahrzeug wird von einer Dame gesteuert“

9.1 Zunächst werden die durch Verknüpfung der Ereignisse L und D entstandenen Ereignisse A, B und C betrachtet:

$$A = L \cap D$$
$$B = L \cup \overline{D}$$
$$C = \overline{L \cap \overline{D}}$$

Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C, z. B. mithilfe einer Vierfeldertafel, und formuliere A, B und C im Sinne der vorliegenden Thematik möglichst einfach mit Worten.

			1

10.0 Von den Patienten eines Krankenhauses haben 65% Übergewicht und 22% zu hohen Blutdruck. 31% der Patienten haben weder Übergewicht noch zu hohen Blutdruck.

10.1 Erstellen Sie ein vollständige Vierfeldertafel und bestimmen Sie wie groß der Anteil der Patienten ist, die Übergewicht und Bluthochdruck haben.

10.2 Wie groß ist der Anteil der Patienten, die nur eines dieser „Leiden“ haben?

10.3 Wie groß ist der Anteil der Patienten, die mindestens eines dieser „Leiden“ haben?

			1

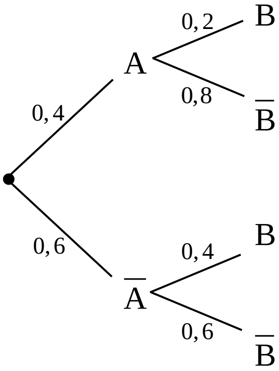
Allgemein gilt in einer Vierfeldertafel mit den Ereignissen A und B:

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
$\sum$	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Mit Hilfe des Satzes von Sylvester lässt sich nun berechnen:

- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- $P(A\cup \overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\cap \overline{B})$
- $P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)$
- $P(\overline{A}\cup \overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap \overline{B})$

Wir wollen nun aus einem zweistufigem Baumdiagramm mit den Merkmalen A und B die dazugehörige Vierfeldertafel ermitteln. Sei dazu folgendes Baumdiagramm gegeben:



ω_i	$P(\{\omega_i\})$	B	$\overline{B}$
$AB \mathrel{\hat{=}} A \cap B$	$P(A \cap B) = 0{,}08$	x	
$A\overline{B} \mathrel{\hat{=}} A \cap \overline{B}$	$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}32$		x
$\overline{A}B \mathrel{\hat{=}} \overline{A} \cap B$	$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}24$	x	
$\overline{A}\overline{B} \mathrel{\hat{=}} \overline{A} \cap \overline{B}$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}36$		x

Dabei gilt:

$P(A) = 0{,}4$ und $P(\overline{A}) = 0{,}6$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}08 + 0{,}24 = 0{,}32$

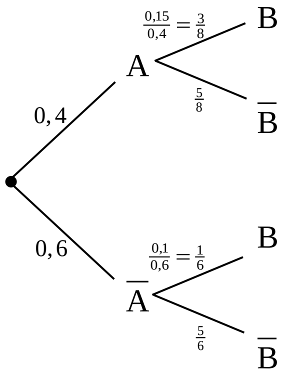
$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}32 + 0{,}36 = 0{,}68$

Somit erhält man folgende Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	$0{,}08$	$0{,}32$	$0{,}4$
$\overline{A}$	$0{,}24$	$0{,}36$	$0{,}6$
$\sum$	$0{,}32$	$0{,}68$	1

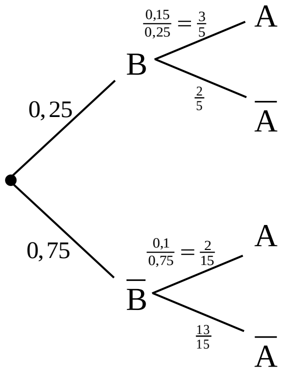
Und auch zu einer Vierfeldertafel lässt sich ein Baumdiagramm (sogar zwei unterschiedliche!) erstellen:

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	$0{,}15$	$0{,}25$	$0{,}4$
$\overline{A}$	$0{,}1$	$0{,}5$	$0{,}6$
$\sum$	$0{,}25$	$0{,}75$	1



ω_i	$P(\{\omega_i\})$	B	$\overline{B}$
$AB \mathrel{\hat{=}} A \cap B$	$P(A \cap B) = 0{,}15$	x	
$A\overline{B} \mathrel{\hat{=}} A \cap \overline{B}$	$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}25$		x
$\overline{A}B \mathrel{\hat{=}} \overline{A} \cap B$	$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}1$	x	
$\overline{A}\overline{B} \mathrel{\hat{=}} \overline{A} \cap \overline{B}$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}5$		x

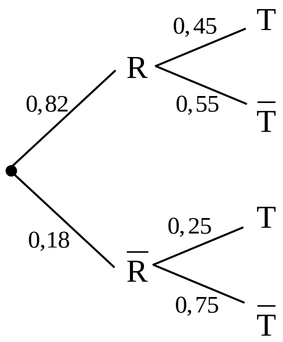
Oder man beginnt im Baumdiagramm zunächst mit dem Merkmal B



ω_i	$P(\{\omega_i\})$	A	$\overline{A}$
$BA \triangleq B\cap A$	$P(B\cap A)=0{,}15$	x	
$B\overline{A} \triangleq B\cap \overline{A}$	$P(B\cap \overline{A})=0{,}25$		x
$\overline{B}A \triangleq \overline{B}\cap A$	$P(\overline{B}\cap A)=0{,}1$	x	
$\overline{B}\overline{A} \triangleq \overline{B}\cap \overline{A}$	$P(\overline{B}\cap \overline{A})=0{,}5$		x

Aufgaben

11. Erstellen Sie zu folgendem Baumdiagramm die dazugehörige Vierfeldertafel.



			$\sum$
$\sum$			1

12. Erstellen Sie zu folgender Vierfeldertafel ein Baumdiagramm

	H	$\overline{H}$	$\sum$
M	0,14	0,32	0,46
$\overline{M}$	0,26	0,28	0,54
$\sum$	0,4	0,6	1

13. Auf Wunsch der Mitarbeiter veranstaltet eine Firma einen sportlichen Betriebsausflug. Alle Mitarbeiter nehmen daran teil. Die Mitarbeiter können zwischen einer Wanderung (W) und einem Fahrradausflug wählen. Außerdem besteht die Möglichkeit, sich jeweils für eine kürzere (K) oder eine längere Strecke zu entscheiden. 60 % der Mitarbeiter entscheiden sich für eine Wanderung. Davon wählen 30 % die kürzere Strecke. 10 % aller Mitarbeiter nehmen an dem Fahrradausflug teil und wählen die längere Strecke. Erstellen Sie zunächst eine Vierfeldertafel und erstellen Sie ein Baumdiagramm beginnend mit dem Merkmal W.