Du kannst negative Menschen
nicht durch deine Positivität verändern.
Sei höflich, tritt zur Seite
und lass das Leben ihr Lehrer sein!
(unbekannt)

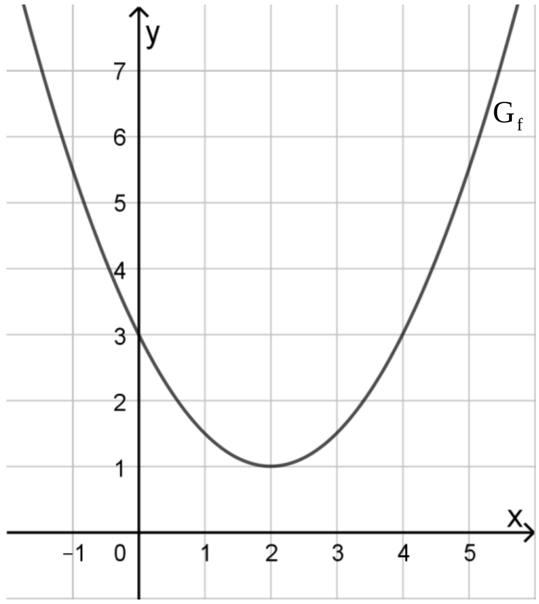
§ 17 Zusammenhang zwischen G_f und $G_{f'}$

Kennt man den Graphen einer Funktion f, nicht aber deren Funktionsterm, so kann man den Graphen der Ableitungsfunktion skizzieren.

17.1 Vom Graph der Funktion f zum Graph der Ableitungsfunktion f'

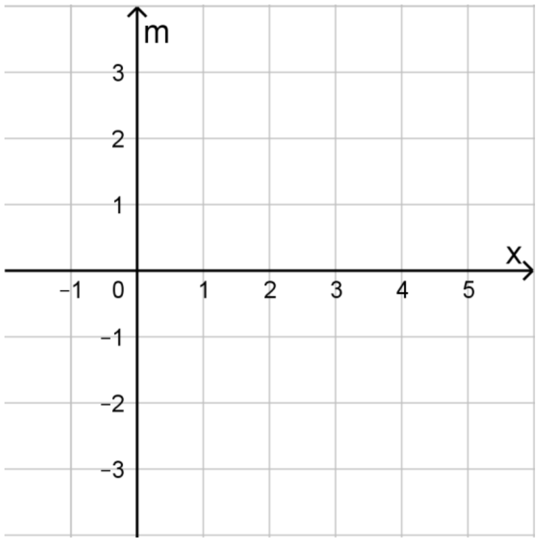
Beispiel: Gegeben ist also der Graph einer Funktion f.

Um nun ausgehend vom Graph G_f auf den Graphen der Ableitungsfunktion f' zu schließen bestimmt man die Steigung des Graphen der Funktion f für verschiedene x-Werte. Diesen Vorgang nennt man allgemein „graphisches Differenzieren“ oder auch „graphisches Ableiten“. Dazu zeichnet (oder denkt sich) man an einer Stelle x die Tangente an den Graphen G_f und ermittelt deren Steigung (Steigungsdreieck - Kästchen zählen!).



Bestimmen wir also die Steigung des Graphen der Funktion f für die folgenden x-Werte:

x	−1	0	1	2	3	4	5
m							



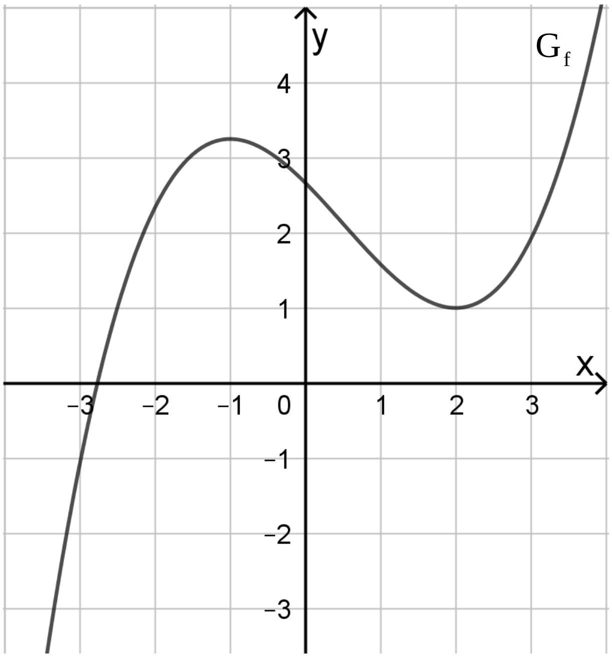
Nun tragen wir in rechts abgebildetes Koordinatensystem die Werte aus obiger Tabelle ein.

Verbindet man die einzelnen Punkte, so erhält man den Graph der Ableitungsfunktion f'.

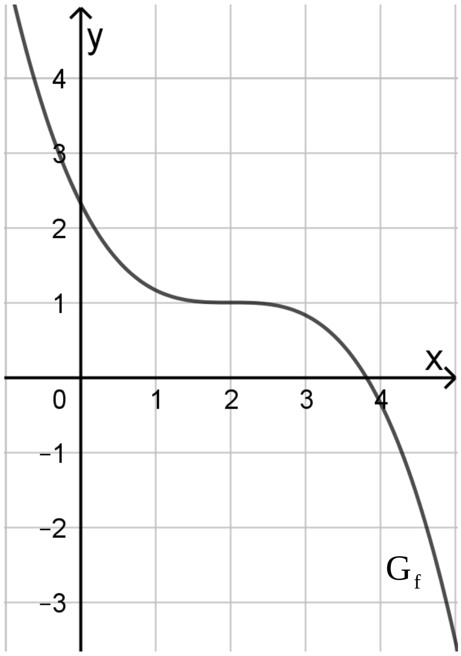
Dabei könnte man auf die Tabelle auch verzichten, da man die x-Werte und die zugehörigen Steigungswerte m sofort in ein Koordinatensystem einzeichnen könnte.
Das wollen wir gleich mal üben.

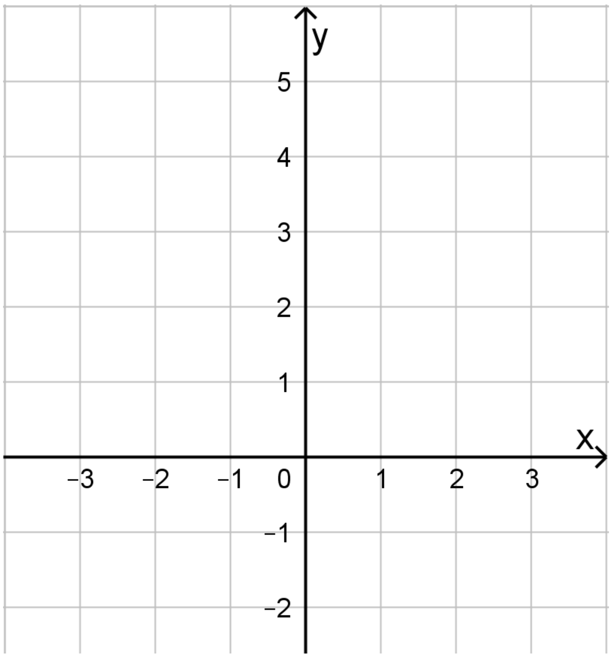
Übung 1+2: Gegeben ist jeweils der Graph der Funktion f. Zeichnen Sie an den ganzzahligen x-Werten die Tangente an den Graphen der Funktion f und bestimmen deren Steigung. Diesen Wert tragen Sie in an der entsprechenden Stelle (x-Wert) in das unterhalb abgebildete Koordinatensystem.

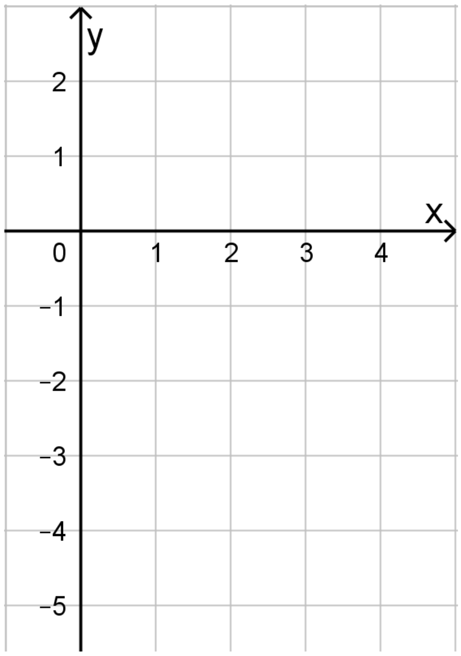
Übung 1:



Übung2:



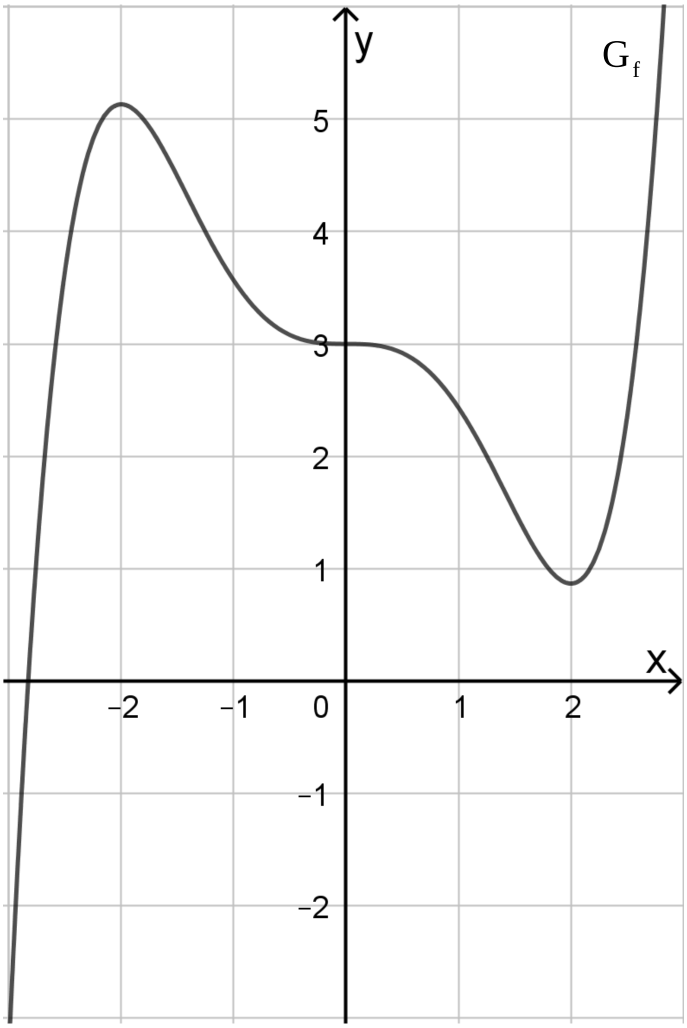




Aus dem Verlauf des Graphen der Funktion f lassen sich konkrete Aussagen über den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion f' machen. Folgende Tabelle gibt dabei den Zusammenhang zwischen beiden Funktionsgraphen wieder.

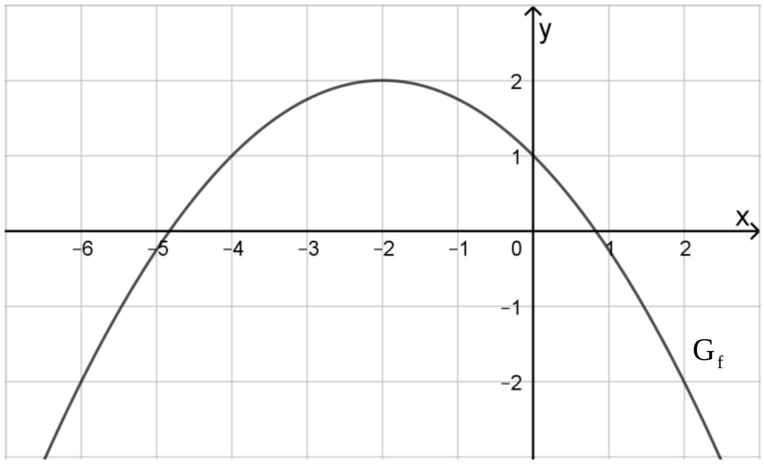
Graph der Funktion f	**Graph der Ableitungsfunktion f'**
hat **Hochpunkt** an der Stelle x_H Graph geht von steigend in fallend über	hat **Nullstelle** x_H Graph schneidet x-Achse von oben nach unten
hat **Tiefpunkt** an der Stelle x_T Graph geht von fallend in steigend über	hat **Nullstelle** x_T Graph schneidet x-Achse von unten nach oben
hat **Wendepunkt** an der Stelle x_W Graph geht von Rechts- nach Linkskrümmung über	hat **Tiefpunkt** an der Stelle x_W y-Koordinate entspricht der Steigung der Wendetangente
hat **Wendepunkt** an der Stelle x_W Graph geht von Links- nach Rechtskrümmung über	hat **Hochpunkt** an der Stelle x_W y-Koordinate entspricht der Steigung der Wendetangente
ist streng monoton steigend	verläuft oberhalb der x-Achse
ist streng monoton fallend	verläuft unterhalb der x-Achse
hat Terrassenpunkt an der Stelle x_{TeP}	berührt die x-Achse an der Stelle x_{TeP} (doppelte Nullstelle)

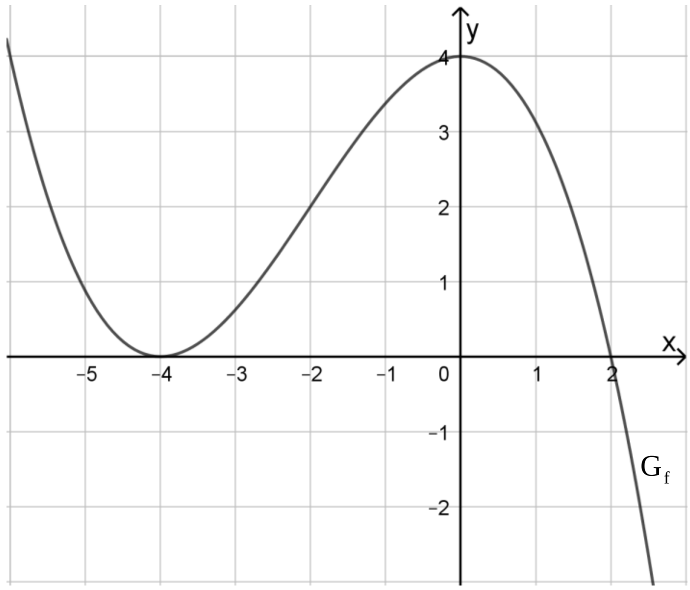
Übung 3: Gegeben ist der Graph der Funktion f. Zeichnen Sie (unter Verwendung der Zusammenhänge aus obiger Tabelle) den Graphen der Ableitungsfunktion f' in dasselbe Koordinatensystem ein.

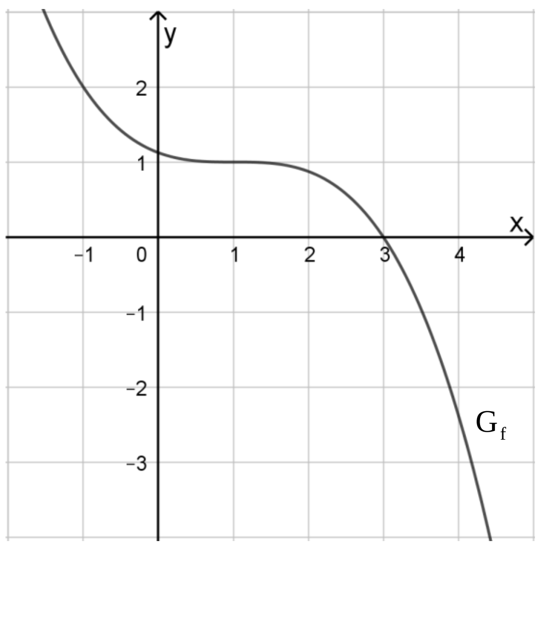


Aufgaben

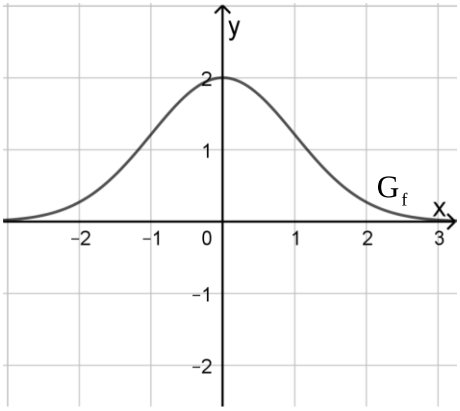
1. Gegeben ist jeweils der Graph der Funktion f. Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in dasselbe Koordinatensystem ein.

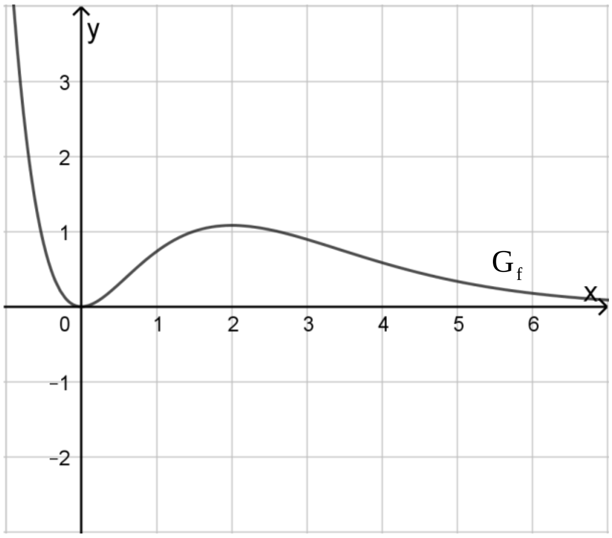


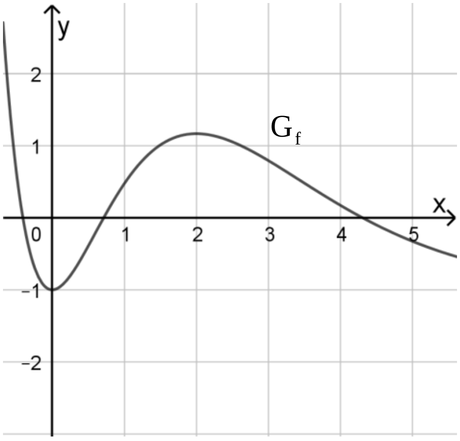


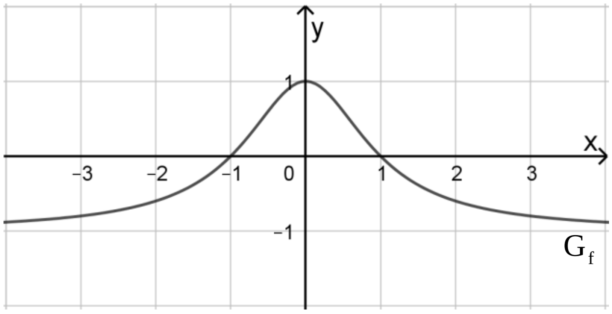


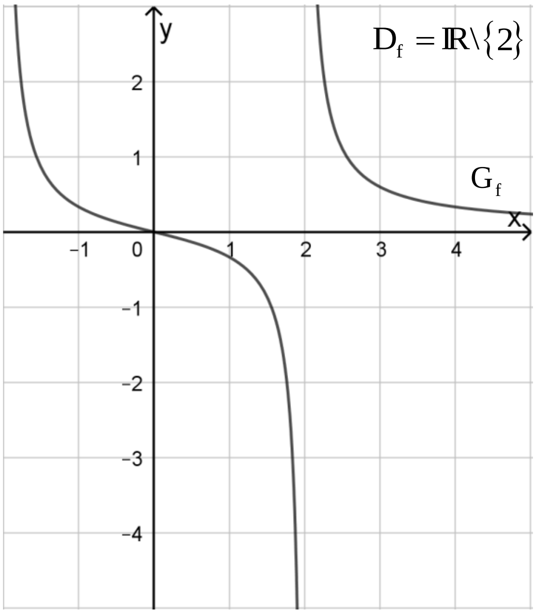
2. Gegeben ist jeweils der Graph der Funktion f. Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in dasselbe Koordinatensystem ein.



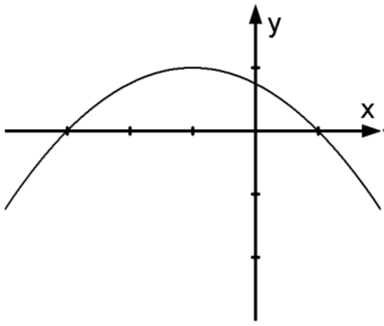


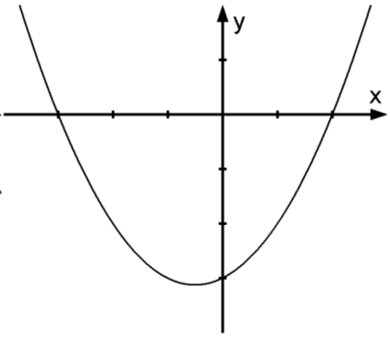


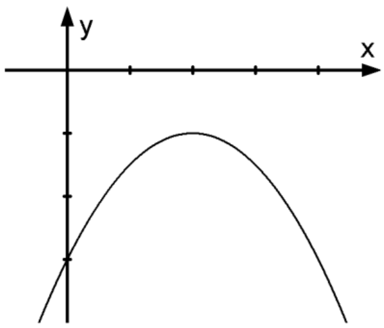


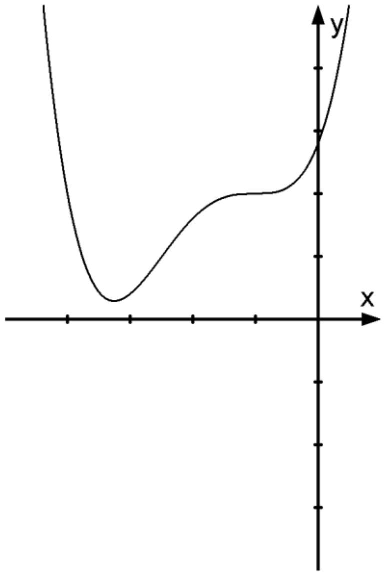


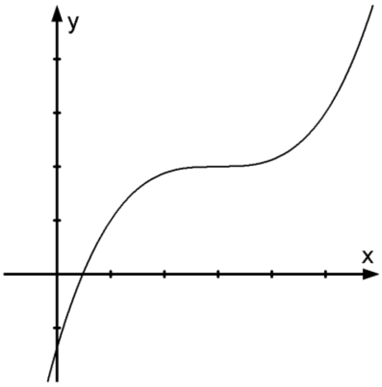
3. Gegeben ist jeweils der Graph der Funktion f. Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in dasselbe Koordinatensystem ein.

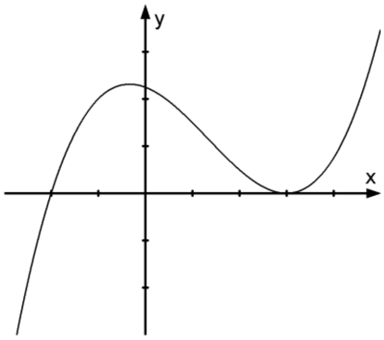


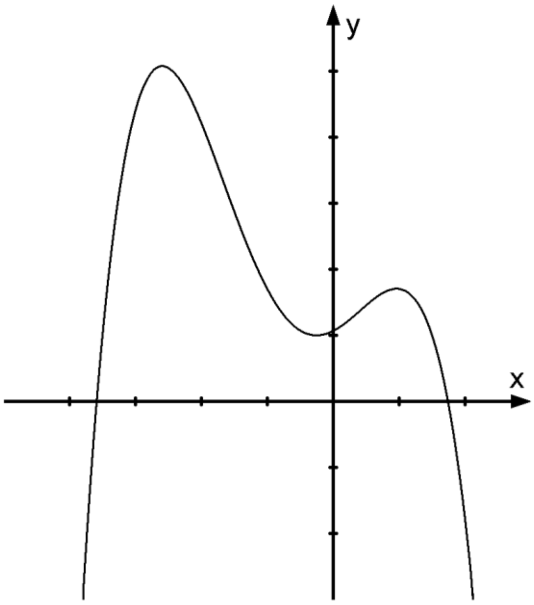


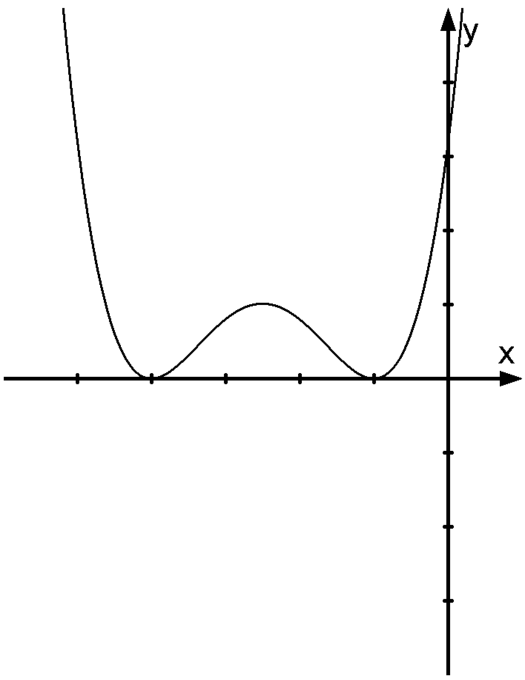








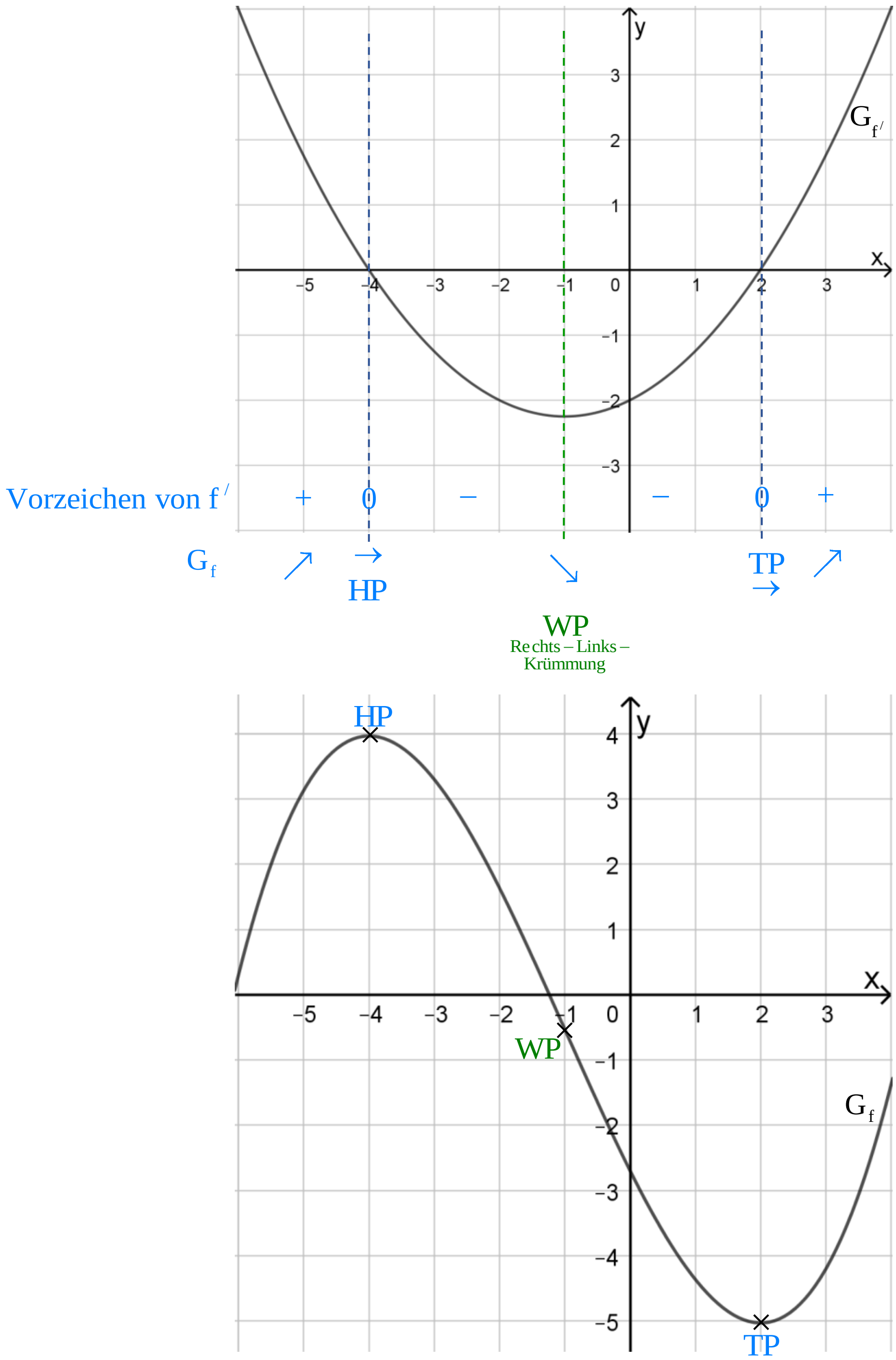




17.2 Vom Graph der Ableitungsfunktion f' zum Graph der Funktion f

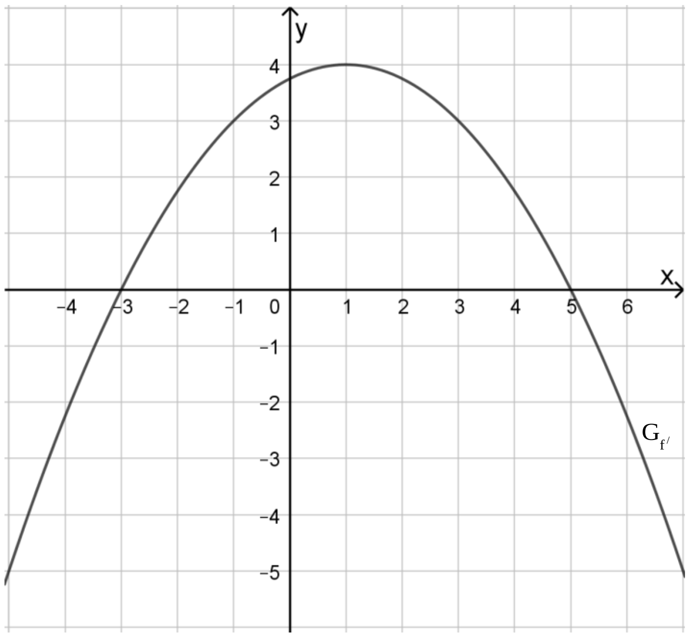
Aber auch der umgekehrte Weg ist möglich. Dabei gelten die Zusammenhänge aus obiger Tabelle nur in umgekehrter Richtung!

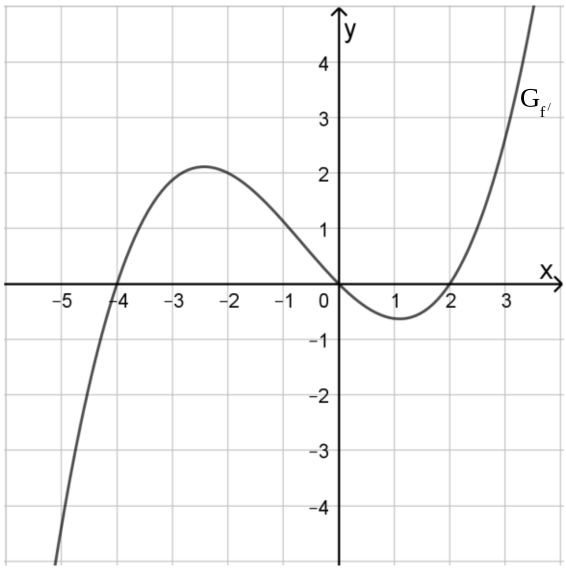
Beispiel: Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion f'. Zeichnen Sie den Verlauf des Graphen einer (möglichen) Funktion f in das Koordinatensystem ein.



Bemerkung: Der „exakte“ Verlauf des Graphen der Funktion f lässt sich nicht zeichnen. Der gesamte Graph G_f könnte insgesamt aber auch nach oben oder nach unten verschoben sein. (Additive Konstante fällt beim Ableiten weg!)

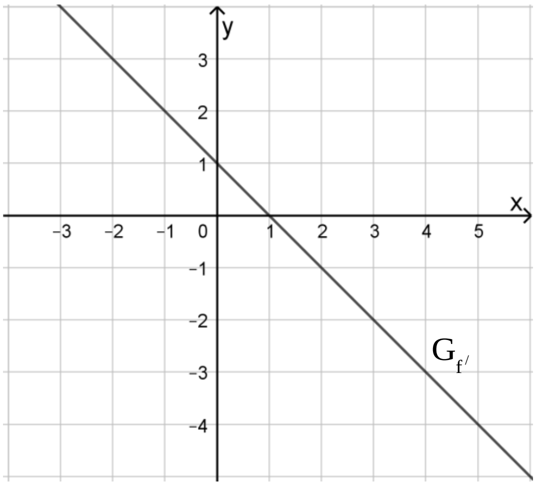
Übung 1+2: Gegeben ist jeweils der Graph der Ableitungsfunktion f'. Zeichnen Sie den Verlauf des Graphen einer (möglichen) Funktion f in dasselbe Koordinatensystem ein.

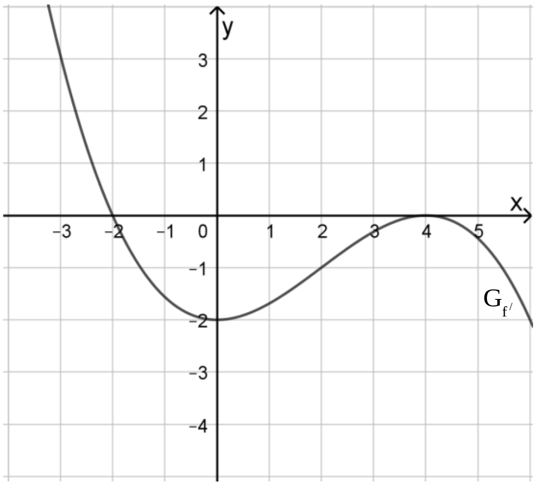


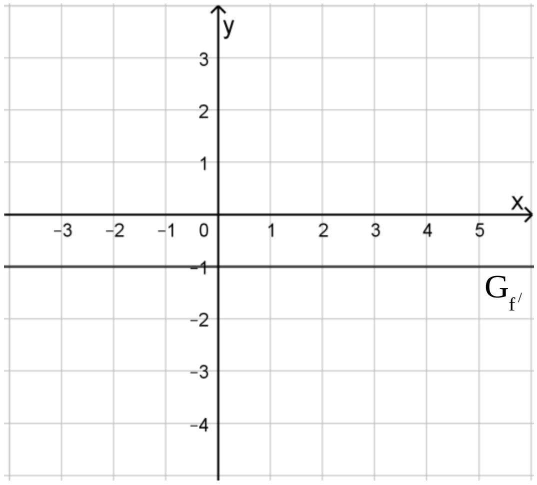


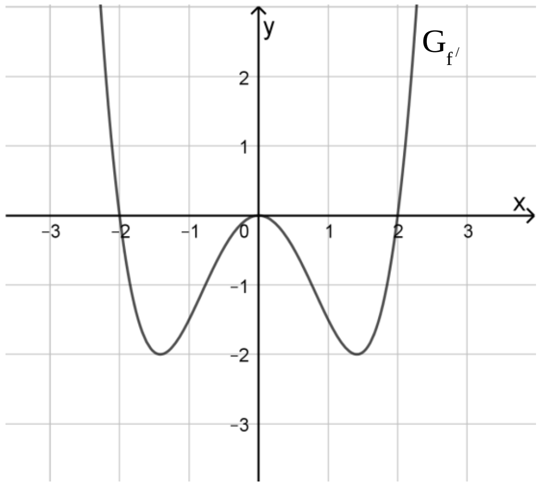
Aufgaben

4. Gegeben ist jeweils der Graph der Ableitungsfunktion f'. Zeichnen Sie den Verlauf des Graphen einer (möglichen) Funktion f in dasselbe Koordinatensystem ein.

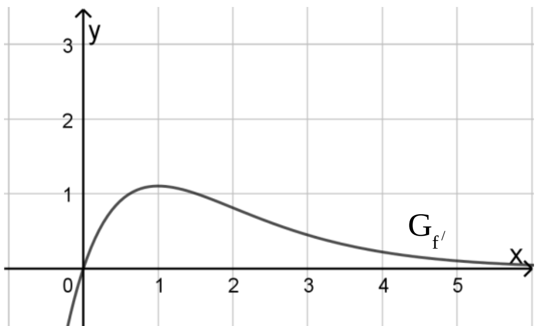


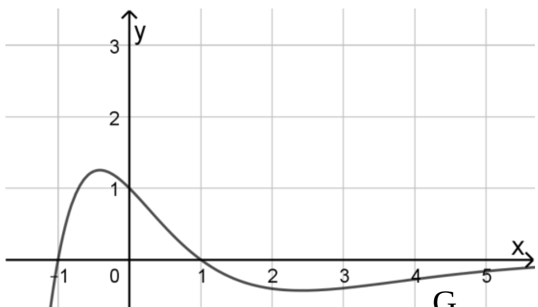


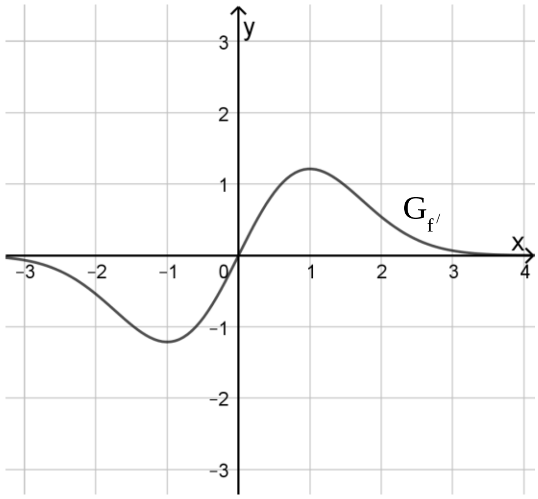


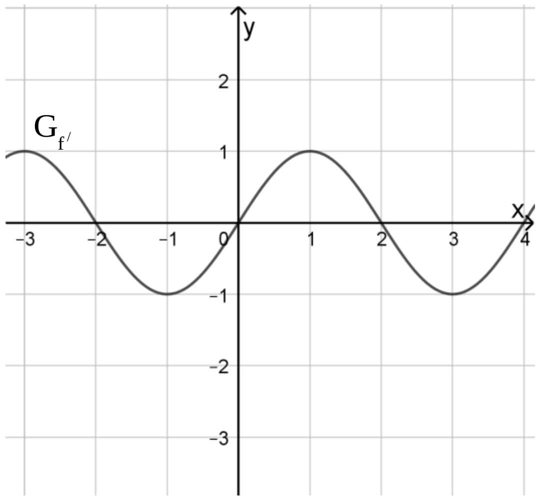


5. Gegeben ist jeweils der Graph der Ableitungsfunktion f'. Zeichnen Sie den Verlauf des Graphen einer (möglichen) Funktion f in dasselbe Koordinatensystem ein.



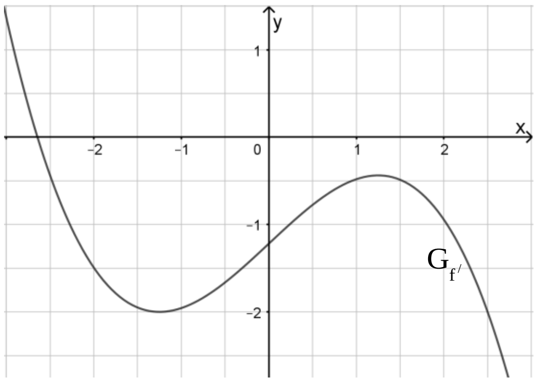






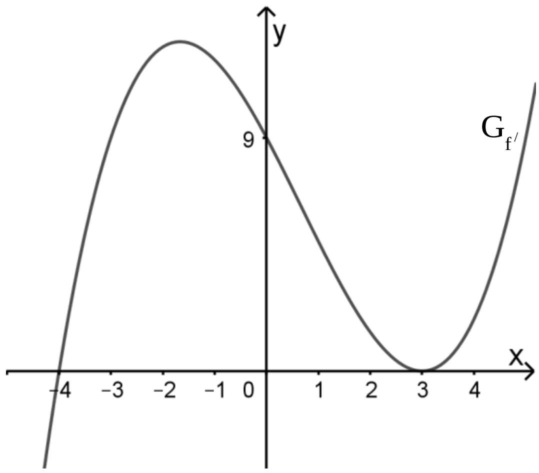
6. In folgender Abbildung ist der Graph der ersten Ableitung einer ganzrationalen Funktion f (vierten Grades) mit $D_f = \mathbb{R}$ dargestellt.

   Welche Aussagen treffen für die Funktion f im Intervall $J = [-3;3]$ zu? Begründen Sie Ihre Entscheidung.



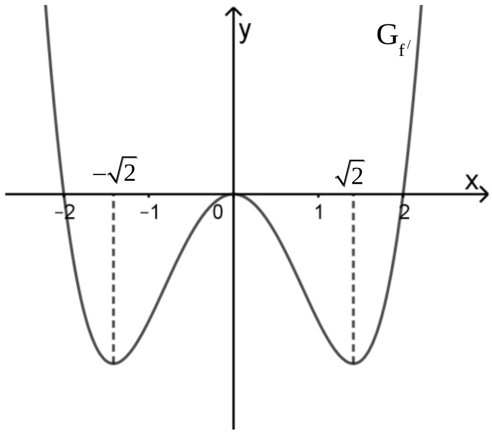
   a) f ist streng monoton fallend in J.
   b) G_f besitzt zwei Wendepunkte in J.
   c) G_f besitzt zwei lokale Extrempunkte in J.
   d) Der Graph G_f hat einen Tiefpunkt in J.
   e) Der Grad von f' ist drei.
   f) Der Graph G_f ist in J sowohl rechts- als auch linksgekrümmt.
   g) Es gilt: $f(-1) > f(1)$

7. Gegeben ist die Funktion f. Der Graph seiner ersten Ableitung ist in folgender Abbildung dargestellt. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr, falsch oder nicht entscheidbar sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



   a) Der Graph von f hat bei $x = 3$ einen relativen Tiefpunkt.
   b) Der Graph von f hat im dargestellten Bereich genau einen Terrassenpunkt.
   c) Der Graph der Funktion f hat bei $x = 0$ eine Tangente mit der Steigung $m = 9$.
   d) Die Funktion f hat bei $x = 3$ eine Nullstelle.
   e) Der Graph von f'' besitzt im dargestellten Bereich zwei Extremstellen.
   f) Der Graph der Funktion f hat im dargestellten Bereich an genau zwei Stellen waagrechte Tangenten.
   g) Es gilt: $f(3) < f(0)$.

8. Gegeben ist die Funktion f. Der Graph seiner ersten Ableitung ist in folgender Abbildung dargestellt. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr, falsch oder nicht entscheidbar sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



a) Der Graph von f hat bei $x = \sqrt{2}$ eine waagrechte Tangente.
b) Der Graph von f hat bei $x = 2$ eine waagrechte Tangente.
c) Der Graph von f hat bei $x = 0$ eine waagrechte Tangente.
d) Der Graph $G_{f'}$ berührt bei $x = 0$ die x-Achse.
e) Der Graph von f'' hat bei $x = 2$ eine waagrechte Tangente.
f) Die Funktion f hat mehr als eine Nullstelle.