§ 6 Vierfeldertafel

An einer Prüfung nehmen 100 Studenten teil, von denen 40 als Raucher bekannt sind. 65 Studenten haben die Prüfung bestanden. Von den Nichtrauchern haben 50 die Prüfung bestanden. Wie groß ist der Anteil der Studenten, die Raucher sind und die Prüfung nicht bestanden haben?
Genauere Zusammenhänge gibt folgende Tabelle wieder, in die wir die absoluten Häufigkeiten eintragen.

	Prüfung bestanden	**Prüfung nicht bestanden**	$\sum$
Raucher			
Nichtraucher			
$\sum$			

Die gleiche Tabelle kann man auch mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten (relative Häufigkeit) erstellen.

	Prüfung bestanden	**Prüfung nicht bestanden**	$\sum$
Raucher			
Nichtraucher			
$\sum$			

Antwort:

Aufgaben:

1. Untersuchungen zeigen, dass 10 % aller Kinder Karies, 16 % Haltungsschäden und 4 % sowohl Karies wie auch Haltungsschäden haben. Fertigen Sie eine Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten an und bestimmen Sie damit den Anteil der Kinder die Gesund sind.

			$\sum$
$\sum$			

   Wie groß ist der Anteil der Kinder, die absolut gesund sind?

   Wie groß ist der Anteil der Kinder, die nur eine „Krankheit" haben?

2. Mit dem Ziel der Früherkennung von Brustkrebs werden Frauen angehalten, ab einem bestimmten Alter regelmäßig eine Röntgenuntersuchung der Brust durchführen zu lassen, selbst wenn keine Symptome vorliegen. Für symptomfreie Frauen im Alter zwischen 40 und 50 Jahren, die im Rahmen einer Reihenuntersuchung eine Mammographie durchführen lassen, liegen folgende Informationen vor:

Von je 1000 dieser Frauen haben 10 Brustkrebs. Von diesen 10 Frauen, die Brustkrebs haben, erhalten 8 einen positiven Mammographie-Befund. Von den restlichen 990 Frauen, die keinen Brustkrebs haben, erhalten dennoch 99 einen positiven Mammographie-Befund.
Fertigen Sie eine Vierfeldertafel an und ergänzen Sie die fehlenden Werte.

			$\sum$
$\sum$			

Stellen Sie sich nun vor, jemand den Sie kennen hat sich ebenfalls dieser Untersuchung unterzogen und als Ergebnis einen verdächtigen Befund erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt bei dieser Person Brustkrebs vor?

Wie groß ist der Anteil der Leute, die keine Erkrankung haben und dies durch einen Test bestätigt wird?

3. Etwa 0,5% der Menschen zwischen 60 und 69 Jahren leiden an Darmkrebs. Das entspricht 500 von 100.000 Menschen. Bei einem gebräuchlichen Test, der zur Feststellung von Blut im Stuhl für die Frühdiagnose des Darmkrebses eingesetzt wird (Haemoccult-Test), fällt der Test bei 250 der Erkrankten positiv aus. Von den verbleibenden 99.500 haben 9950 ebenfalls ein positives Testergebnis.
Fertigen Sie eine Vierfeldertafel an und ergänzen Sie die fehlenden Werte.

			$\sum$
$\sum$			

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem positiven Testergebnis tatsächlich auch Darmkrebs zu haben?

Wie groß ist der Anteil der Leute, die keine Erkrankung haben aber dennoch ein positives Ergebnis bekommen?

4. Zur Abklärung eines positiven Haemoccultests werden weitere diagnostische Verfahren nötig. Üblicherweise wird als Folgeuntersuchung eine Darmspiegelung durchgeführt. Erinnern Sie sich? In unserem Beispiel 3 hatten 10200 Testpersonen einen positiven Haemoccultest. Bei all diesen Personen wird nun eine Darmspiegelung durchgeführt. Die Zahl der Personen mit Darmkrebs (250 Personen) bleibt gleich. Mit der Darmspiegelung haben alle diejenigen, die die Krankheit nicht haben auch ein negatives Untersuchungsergebnis. 235 der Erkrankten haben ein positives Testergebnis.

			$\sum$
$\sum$			

Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit bei einer Erkrankung einen positiven Befund bei der Darmspiegelung zu erhalten?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht jemand der Darmkrebs hat sorglos nach Hause?

5. In einer Studie wurde bei 1000 Frauen ein Schwangerschaftstest durchgeführt. 20 dieser Frauen waren schwanger. Der Test war bei 20 von ihnen positiv und 975 der nicht schwangeren Frauen hatten einen negativen Test.

			$\sum$
$\sum$			

Stellen Sie sich vor, eine Frau würde einen Schwangerschaftstest durchführen lassen und das Ergebnis wäre positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich schwanger ist?

6. Das Blut von Blutspendern wird generell u.a. auf das HI-Virus getestet. Unter den insgesamt 20.000 Blutspendern eines großen deutschen Krankenhauses, die hinsichtlich einer möglichen HIV Infektion getestet wurden, gab es nur einen Infektionsfall. Dieser hatte auch ein positives Testergebnis. Von den 19.999 nicht infizierten Blutspendern hatten allerdings 40 ebenfalls ein positives Testergebnis.

			$\sum$
$\sum$			

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Blutspender mit einem positiven Testergebnis auch tatsächlich HIV-infiziert ist?

7.0 In einem Betrieb sind 60% Männer beschäftigt. Von den Betriebsangehörigen sind 30% Raucher. 20% der Betriebsangehörigen sind weibliche Raucher.
Folgende Bezeichnungen für Ereignisse werden festgelegt:
M: Ein Betriebsangehöriger ist männlich.
R: Ein Betriebsangehöriger ist Raucher.

Zunächst werden die durch Verknüpfung der Ereignisse M und R entstandenen Ereignisse A und B betrachtet:

$A = M \cup \overline{R}$

$B = \overline{\overline{M} \cap R}$

7.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B mit Hilfe einer Vierfeldertafel und formulieren Sie die Ereignisse A und B im Sinne der vorliegenden Thematik.

			$\sum$
$\sum$			

8.0 Bei umfangreichen Verkehrszählungen in einer Großstadt wurden Zusammenhänge zwischen der Anzahl der vorbeifahrenden Pkws bzw. Lkws und dem Geschlecht der am Steuer sitzenden Person festgestellt. Im folgenden werden nur diese beiden Fahrzeugarten betrachtet. Die dabei ermittelten relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.
Nach dem Ergebnis der Zählung handelt es sich bei 20% der betrachteten Fahrzeuge um Lkws. Je 31 von 100 der am Steuer eines Fahrzeugs sitzenden Personen sind weiblichen Geschlechts. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem zufällig herausgegriffenen Auto um einen von einer Dame gesteuerten Pkw handelt beträgt 0,28.
Folgende Bezeichnungen für Ereignisse werden festgelegt:
L: „Das Fahrzeug ist ein Lkw“
D: „Das Fahrzeug wird von einer Dame gesteuert“

8.1 Zunächst werden die durch Verknüpfung der Ereignisse L und D entstandenen Ereignisse A, B und C betrachtet:

$A = L \cap D$

$B = L \cup \overline{D}$

$C = \overline{L \cap \overline{D}}$

Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C, z. B. mithilfe einer Vierfeldertafel, und formuliere A, B und C im Sinne der vorliegenden Thematik möglichst einfach mit Worten.

			$\sum$
$\sum$			

9.0 In einer Disco mit 1000 Gästen beträgt der Frauenanteil 40%. 45% der Gäste haben schon einen festen Partner. Jedoch sind 7 von 10 Männern noch Single.

9.1 Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel und bestimmen Sie damit den Anteil der Singlefrauen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine angesprochene Frau auch Single ist?

			$\sum$
$\sum$			

10.0 Im Jahr 1996 wurden die beiden Filme „Independence Day“ und „Mission Impossible“ in den Kinos ausgestrahlt. Bei einer Umfrage unter 1200 willkürlich ausgewählten Personen zwischen 16 und 21 Jahren haben 960 Personen den Film „Mission Impossible“ gesehen. 15% der Befragten haben den Film „Independence Day“ nicht gesehen. Jedoch haben 95% der Befragten mindestens einen der beiden Filme gesehen.

10.1 Erstellen Sie ein vollständige Vierfeldertafel und bestimmen Sie wie viele Personen nur einen dieser beiden Filme gesehen haben.

			$\sum$
$\sum$			

11.0 Von den Patienten eines Krankenhauses haben 65% Übergewicht und 22% zu hohen Blutdruck. 31% der Patienten haben weder Übergewicht noch zu hohen Blutdruck.

11.1 Erstellen Sie ein vollständige Vierfeldertafel und bestimmen Sie wie groß der Anteil der Patienten ist, die Übergewicht und Bluthochdruck haben.

			$\sum$
$\sum$			

11.2 Wie groß ist der Anteil der Patienten, die nur eines dieser „Leiden“ haben?

11.3 Wie groß ist der Anteil der Patienten, die mindestens eines dieser „Leiden“ haben?

Allgemein gilt:

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
$\sum$	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Mit Hilfe des Satzes von Sylvester lässt sich nun berechnen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$$
$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B)$$
$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$