§ 2 Ereignis, Ereignisraum und Ereignisalgebra

In der Regel interessiert man sich bei einem Zufallsexperiment nicht für den ganzen Ergebnisraum, sondern nur für ein Ergebnis oder einen Teil des Ergebnisraums. So setzt man beim Roulette-Spiel z.B. auf alle schwarzen Felder, alle geraden Zahlen, auf eine Reihe oder z.B. auf mehrere verschiedene Zahlen. Solche Mengen nennt man Ereignisse.

2.1 Ereignis und Ereignisraum

Definition: Ist Ω der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, so heißt jede Teilmenge $E \subseteq \Omega$ ein Ereignis.

Man sagt das Ereignis E ist eingetreten, wenn das im Experiment auftretende Ergebnis ein Element der Menge E ist.
Ist $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_m\}$ der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, so heißen die Ereignisse $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_m\}$ die Elementarereignisse des Ergebnisraumes.
Ein Elementarereignis entspricht somit einem einzelnen Ergebnis.

Beispiele für Ereignisse:

1.) Werfen eines Würfels: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Betrachten Sie nun folgende Ereignisse:

E_1: Augenzahl ist ungerade

Man sagt, das Ereignis E_1 sei eingetreten, wenn beim einmaligen Wurf des Würfels ungerade Zahl geworfen wurde

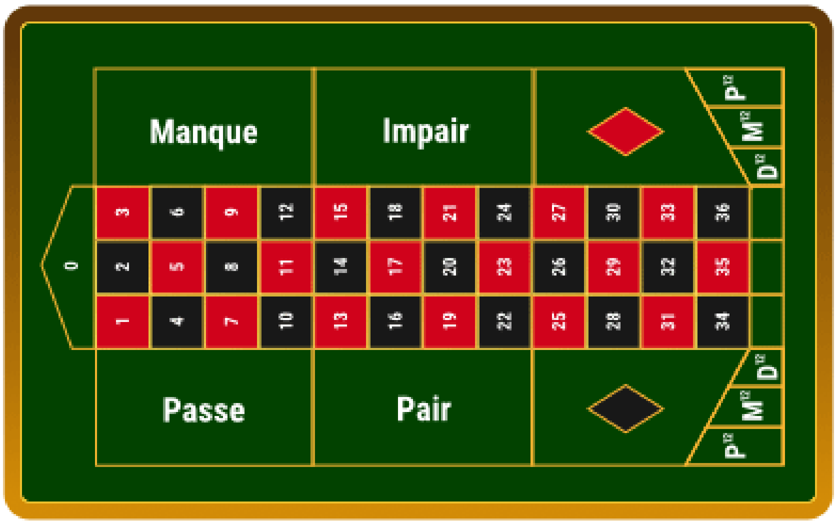
	$\Rightarrow$	$E_1 =$
E_2: Augenzahl ist gerade	$\Rightarrow$	$E_2 =$
E_3: Augenzahl ist durch 3 teilbar	$\Rightarrow$	$E_3 =$
E_4: Augenzahl ist 6	$\Rightarrow$	$E_4 =$
E_5: Augenzahl ist größer als 3	$\Rightarrow$	$E_5 =$

2.) Augensumme beim Werfen zweier Würfel: $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

Betrachten Sie nun folgende Ereignisse:

E_1:	Augensumme ist ungerade	$\Rightarrow E_1 =$
E_2:	Augensumme ist gerade	$\Rightarrow E_2 =$
E_3:	Augensumme ist durch 3 teilbar	$\Rightarrow E_3 =$
E_4:	Augensumme ist 7	$\Rightarrow E_4 =$
E_5:	Augensumme ist durch 4 teilbar	$\Rightarrow E_5 =$
E_6:	Augensumme ist 6, 7 oder 8	$\Rightarrow E_6 =$
E_7:	Augensumme ist kleiner als 6	$\Rightarrow E_7 =$
E_8:	Augensumme ist größer oder gleich 9	$\Rightarrow E_8 =$
E_9:	Augensumme besitzt die Teiler 3 und 4	$\Rightarrow E_9 =$
E_{10}:	Augensumme besitzt die Teiler 3 oder 4	$\Rightarrow E_{10} =$

3.) Roulette: $\Omega = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 34; 35; 36\}$



SETZUNG	FACHAUSDRUCK (FRZ.)	ANZAHL ZAHLEN	BEISPIELZAHLEN	AUSZAHLUNG
Ganze Zahl	Pleine	1	$\{7\}$	36-fach
Halbe Zahl	Cheval	2	$\{26; 29\}$	18-fach
Reihe	Transversal pleine	3	$\{28; 29; 30\}$	12-fach
Karo	Carré	4	$\{26; 27; 29; 30\}$	9-fach
Linie	Transversal simple	6	$\{28; 29; 30; 31; 32; 33\}$	6-fach
Dutzend	Dutzend	12	1 bis 12	3-fach
Spalte	Kolonne	12	Längsreihe von 12 Zahlen	3-fach
Rot	Rouge	18	Alle roten	2-fach
Schwarz	Noir	18	Alle schwarzen	2-fach
Gerade	Pair	18	Alle geraden	2-fach
Ungerade	Impair	18	Alle ungeraden	2-fach
1. Hälfte	Manque	18	1 bis 18	2-fach
2. Hälfte	Passe	18	19 bis 36	2-fach

Man hat hier zu einem Ergebnisraum viele verschiedene Ereignisse. Beim Roulette haben die Ereignisse einen frz. Namen.

E_1 : Rouge

$E_1 = \{1; 3; 5; 7; 9; 12; 14; 16; 18; 19; 21; 23; 25; 27; 30; 32; 34; 36\}$

E_2 : Manque

$E_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18\}$

E_3 : 1. Kolonne

$E_3 = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; 34\}$

<u>Besondere Ereignisse</u>:

a) Ereignisse mit nur einem Element heißen <u>Elementarereignisse</u>.
Ist $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_m\}$ der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, dann sind die Ereignisse $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_m\}$ die <u>Elementarereignisse</u> des Ergebnisraumes.

b) Das Ereignis Ω heißt <u>sicheres Ereignis</u>, da es stets eintritt.

c) Das Ereignis $\{\ \}$ („leere Menge") heißt <u>unmögliches Ereignis</u>, da es nie eintreten kann.

d) Als Komplement $\overline{E}$ eines Ereignisses E bezeichnet man die Menge derjenigen Elemente aus Ω, die nicht Element von E sind.
Man nennt dann $\overline{E}$ auch das Gegenereignis von E.

2.2 Ereignisalgebra

Häufig interessiert man sich nicht nur für ein Ereignis, sondern für die Verknüpfung von Ereignissen.
So kann es z.B. interessant sein, wenn zwei Ereignisse E_1 und E_2 gegeben sind, dass

a) E_1 und E_2 gleichzeitig eintreten.
Man schreibt dafür: $E_1 \cap E_2$ (lies: „E_1 geschnitten E_2")

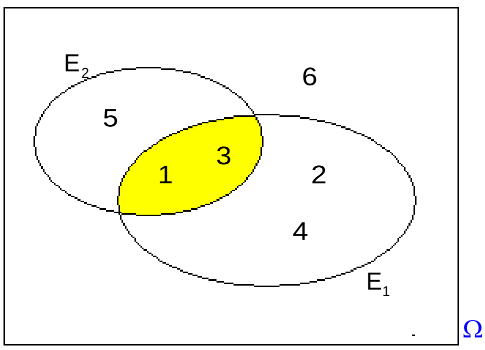
b) E_1 oder E_2 eintritt.
Man schreibt dafür: $E_1 \cup E_2$ (lies: „E_1 vereinigt E_2")
Bemerkung: Es können auch beide Ereignisse gleichzeitig eintreten.

c) E_1 nicht eintritt.
Man schreibt dafür: $\overline{E_1}$ (lies: „nicht E_1")
Bemerkung: Man nennt $\overline{E_1}$ auch das Gegenereignis zu E_1 und kann auch schreiben:
$\overline{E_1} = \Omega \backslash E_1$

Diese Verknüpfungen lassen sich auch grafisch durch sogenannte Venn-Diagramme darstellen.

Das wollen wir nun an dem Zufallsexperiment „Augenzahl beim Werfen eines Würfels" verdeutlichen.
Für den Ergebnisraum Ω gilt: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Wir betrachten nun die Ereignisse:
E_1 : Zahl ist höchstens 4
E_2 : Zahl ist ungerade
Also: $E_1 = \{1; 2; 3; 4\}$ und $E_2 = \{1; 3; 5\}$

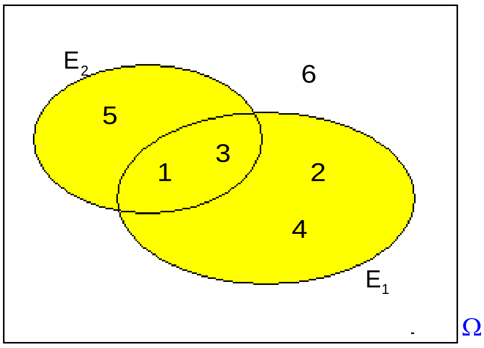
a) Für das Ereignis $E_1 \cap E_2$ gilt:
$E_1 \cap E_2 = \{1; 3\}$
$E_1 \cap E_2$ tritt ein, wenn E_1 und E_2 zugleich eintritt



b) Für das Ereignis $E_1 \cup E_2$

$E_1 \cup E_2 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

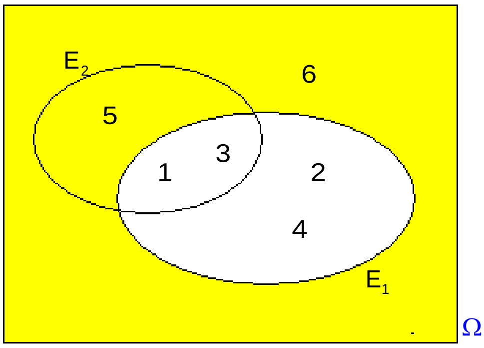
$E_1 \cup E_2$ tritt ein, wenn E_1 oder auch E_2 eintritt



c) Für das Ereignis $\overline{E_1}$

$\overline{E_1} = \{5; 6\}$

$\overline{E_1}$ tritt ein, wenn A nicht eintritt



Definition: Zwei Ereignisse A, B heißen unvereinbar, wenn gilt: $A \cap B = \{\ \}$

Ist $A \cap B \neq \{\ \}$, so sind die Ereignisse A und B <u>vereinbar</u>.

Darüber hinaus gelten für die Ereignisse A und B folgende Rechengesetze:

1.) Kommutativgesetz:

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$

2.) Assoziativgesetz:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\qquad$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3.) Distributivgesetz:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4.) Gesetze für das Komplement:

$A \cap \overline{A} = \{\ \}$ $\qquad$ $A \cup \overline{A} = \Omega$

5.) Gesetze für Ω und $\{\ \}$:

$A \cap \Omega = A$ $\qquad$ $A \cup \{\ \} = A$

$A \cap \{\ \} = \{\ \}$ $\qquad$ $A \cup \Omega = \Omega$

$\overline{\{\ \}} = \Omega$ $\qquad$ $\overline{\Omega} = \{\ \}$

$A \cap A = A$

6.) Gesetze von de Morgan:

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Aufgaben:

1.0 Beim Würfeln interessieren die geworfene Augenzahl. Dabei werden folgende Ereignisse betrachtet.

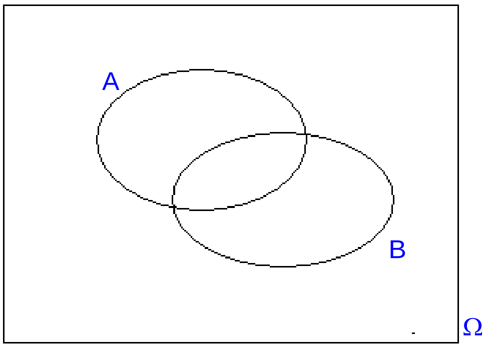
$$A=\{2;4\},\ B=\{2;6\} \text{ und } C=\{2;4;6\}$$

1.1 Bilden Sie die Ereignisse: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A\cap B$, $\overline{A}\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $A\cup B$, $\overline{A}\cup B$, $A\cup\overline{B}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$.

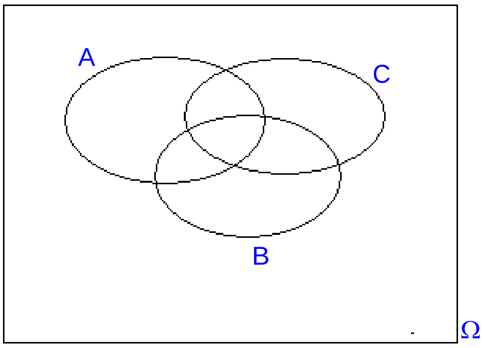
1.2 Interpretieren Sie das Ereignis $\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$ und stellen Sie es im Venn-Diagramm und als Menge dar.

2. Schraffiere das Gebiet im angegebenen Venn-Diagramm.

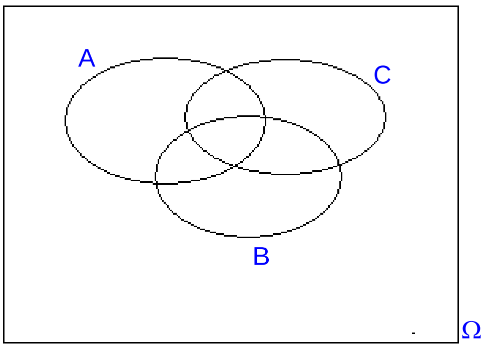
a) $(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$



b) $A\cup\left(B\cap\overline{C}\right)$



c) $(A\cup B)\cap\overline{C}$



3.0 Beim Spiel *Schere-Stein-Papier* müssen zwei Spieler auf ein Signal entweder die offene Hand (Papier), zwei gestreckte Finger (Schere) oder die Faust (Stein) zeigen, wobei der jeweilige Sieger nach festen Regeln ermittelt wird: Die Schere schneidet das Papier, das Papier wickelt den Stein ein, der Stein macht die Schere stumpf. Es gewinnt

Schere gegen Papier
Papier gegen Stein
Stein gegen Schere

3.1 Stellen Sie zunächst den Ergebnisraum Ω dar und geben Sie seine Mächtigkeit an.

3.2 Stellen Sie folgende Ereignisse dar:

A: „Der 1. Spieler gewinnt“
B: „Der 2. Spieler gewinnt“
C: „Einer der beiden Spieler gewinnt“
D: „Kein Spieler gewinnt“

3.3 In einer kleinen Spielerweiterung können zwei Finger zu einem o geformt werden (Brunnen). Geben Sie hierfür den Ergebnisraum Ω an und stellen Sie die Ereignisse A, B, C und D (siehe 3.2) dar.

4.0 A und B seien zwei Ereignisse. Drücken Sie folgende Aussagen symbolisch aus:

4.1 Beide Ereignisse treten ein.

4.2 Höchstens eines von beiden Ereignissen tritt ein.

4.3 Keines von beiden Ereignissen tritt ein.

4.4 Mindestens eins von den beiden Ereignissen tritt ein.

4.5 Genau eines von beiden Ereignissen tritt ein.

5.0 Unter den Teilnehmer einer Versammlung wird eine Person zufällig ausgewählt. Folgende Ereignisse seien definiert:

M: „Die Person ist männlich“
R: „Die Person raucht“
V: „Die Person ist verheiratet“

5.1 Was bedeutet $M = R$, $M \cap R = M$, $M \cap R \cap V = M$?

5.2 Beschreiben Sie die Ereignisse $R \cap V$, $R \cup V$.

5.3 Drücken Sie folgendes Ereignis symbolisch aus: „Die ausgewählte Person ist männlich, sie raucht nicht und ist nicht verheiratet“.

5.4 Beschreiben Sie das Ereignis $M \cap \left(\overline{R \cap V}\right)$.

6. Untersuchen Sie, ob folgende Ereignisse unvereinbar sind.

a) A und $\overline{A \cup B}$
b) A und $\overline{A \cap B}$
c) A und $\overline{A} \cap B$
d) $\overline{A \cup B}$ und $\overline{A} \cap B$

7. Prüfen Sie die Gültigkeit folgender Behauptungen.

a) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\overline{A}$, $\overline{B}$ unvereinbar
b) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\overline{A}$, B unvereinbar
c) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\overline{A}$, $\overline{B}$ nicht unvereinbar
d) A, B unvereinbar $\Rightarrow$ $\overline{A}$, B nicht unvereinbar

Geben Sie gegebenenfalls Gegenbeispiele an.

Weitere Aufgaben:
Cornelsen Technik Band 3
Seite 152: 1. + 2. + 6. + 8.
Seite 153: 2. + 6. + 7. + 10.