

## § 1 Zufallsexperiment; Ergebnis; Ergebnisraum; Baumdiagramm

In der Stochastik beschäftigt man sich vorwiegend mit der Untersuchung von Zufallsexperimenten.

### 1.1 Zufallsexperiment, Ergebnis und Ergebnisraum

Definition: Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, den man unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholen kann und der bei mehreren Versuchen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen kann.

#### Beispiele:

Einige der bekanntesten Zufallsexperimente sind Lotto, Roulette, Werfen einer Münze, Werfen eines Würfels, Ziehen einer Kugel aus einer Urne.

Definition: Jeden Ausgang eines Zufallsexperiments bezeichnet man als Ergebnis. Die Menge aller verschiedenen Ergebnisse eines Zufallsexperiments nennt man Ergebnisraum  $\Omega$ . Die Mächtigkeit  $|\Omega|$  eines Ergebnisraums  $\Omega$  ist die Anzahl der Elemente von  $\Omega$ .

#### Beispiele:

a) Lotto (Ziehen der ersten Kugel)

$$\Omega = \{1; 2; 3; \dots; 46; 47; 48; 49\}$$

$$|\Omega| = 49$$

b) Roulette

$$\Omega = \{0; 1; 2; 3; \dots; 34; 35; 36\}$$

$$|\Omega| = 37$$

c) Werfen einer Münze

$$\Omega = \{\text{"Kopf"}, \text{"Zahl"}\}$$

$$|\Omega| = 2$$

d) Werfen eines Würfels

$$\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad |\Omega_1| = 6$$

$$\Omega_2 = \{\text{"6"}, \text{"Nicht 6"}\} \quad |\Omega_2| = 2$$

$$\Omega_3 = \{\text{"Gerade Zahl"}, \text{"Ungerade Zahl"}\} \quad |\Omega_3| = 2$$

Dabei kann es bei einem Zufallsexperiment auch mehrere Ergebnisräume geben, je nachdem wofür man sich bei einem Experiment interessiert. Im letzten Beispiel nennt man  $\Omega_2$  eine Vergrößerung von  $\Omega_1$  und umgekehrt  $\Omega_1$  eine Verfeinerung von  $\Omega_2$  oder  $\Omega_3$ .

## 1.2 Das Baumdiagramm

Das **Baumdiagramm** ist eine „graphische“ Darstellung, die zur Veranschaulichung der Ergebnisse eines Zufallsexperiments dient. Man unterscheidet dabei grob zwei Arten von Zufallsexperimenten:

**Einstufige Zufallsexperimente:** Das Zufallsexperiment wird nur einmal durchgeführt. Bei der Erstellung des Baumdiagramms macht man sich Gedanken, welche möglichen Ausgänge (Ergebnisse) eintreten können.

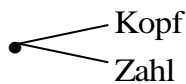
**Mehrstufige Zufallsexperimente:** Das Zufallsexperiment wird mehrmals hintereinander durchgeführt.

Bei der Erstellung des Baumdiagramms macht man sich vor jeder Durchführung der einzelnen Zufallsexperimente Gedanken, welche möglichen Ausgänge (Ergebnisse) eintreten können.

### Beispiele und Aufgaben

Zeichnen Sie zu folgenden Zufallsexperimenten das zugehörige Baumdiagramm, geben Sie den Ergebnisraum  $\Omega$  und die Mächtigkeit von  $\Omega$  an.

1. “Werfen einer Münze“



$$\Omega = \{ \text{"Kopf"}, \text{"Zahl"} \}; |\Omega| = 2$$

2. “Werfen eines Würfels“
3. „Eine Münze wird zweimal hintereinander geworfen“
4. “Aus einer Urne mit mehreren roten und schwarzen Kugeln, die sonst nicht unterscheidbar sind werden
  - a) nacheinander
  - b) gleichzeitigzwei Kugeln zufällig herausgegriffen.
5. In einer Urne befinden sich eine rote (r), eine weiße (w) und zwei schwarze (s) Kugeln. Zeichnen Sie zu folgenden Zufallsexperimenten jeweils ein Baumdiagramm und geben Sie den Ergebnisraum  $\Omega$  an. Aus der Urne ...
  - a) ... wird eine Kugel gezogen.
  - b) ... werden gleichzeitig zwei Kugeln gezogen.
  - c) ... werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, wobei nach dem ersten Zug, die gezogene Kugel wieder in die Urne gelegt wird.
  - d) ... werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
  - e) ... werden solange Kugeln gezogen, bis keine schwarze Kugel mehr in der Urne ist.

6. Ein Erlebnisparkbetreiber befragt eine große Zahl von Besuchern, ob sie aus der Region (R) kommen oder überregionale Besucher ( $\bar{R}$ ) sind. Ferner interessiert, ob sie mit dem Auto (A), dem Bus (B) oder auf sonstige Weise (S) angereist sind. Das Ergebnis der Befragung wird als Zufallsexperiment aufgefasst.  
Zeichnen Sie das zu diesem Zufallsexperiment gehörende Baumdiagramm, geben Sie den zugehörigen Ergebnisraum an und bestimmen Sie die Anzahl der Ergebnisse dieses Zufallsexperiments.
7. In einem Mischwald wird eine Versuchsfläche auf Schäden durch Wildverbiss an den Jungtrieben der Bäume untersucht. Einzige Nadelbaumart ist die Fichte (F). Auf der Versuchsfläche befinden sich außerdem Buchen (B) ansonsten Eichen (E). Alle Baumarten kommen auf der Fläche gleichmäßig verteilt vor.  
Als Zufallsexperiment wird die Auswahl eines beliebigen Baumes betrachtet; dabei wird die Baumart festgestellt und geprüft, ob Verbiss (V) vorliegt oder nicht ( $\bar{V}$ ).  
Zeichnen Sie das zu diesem Zufallsexperiment gehörende Baumdiagramm, geben Sie den zugehörigen Ergebnisraum an und bestimmen Sie die Anzahl der Ergebnisse dieses Zufallsexperiments.
8. Die Post eines kleineren Landes gibt den Druck einer neuen Sonderbriefmarke in Auftrag. Beim ersten Probedruck einer größeren Menge dieser Marken werden noch Fehler bei der Zählung, beim Farbton sowie bei der Grafik festgestellt. Es kann davon ausgegangen werden, dass diese Fehlerarten unabhängig voneinander auftreten und dass die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens während des Probedrucks konstant bleiben.  
Folgende Bezeichnungen seien vorgegeben:  
Z: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Zählung in Ordnung.  
F: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Farbe in Ordnung.  
G: Bei einer zufällig ausgewählten Marke ist die Grafik in Ordnung.  
Eine zufällig ausgewählte Briefmarke wird hinsichtlich der Merkmale Z, F und G untersucht.  
Zeichnen Sie das Baumdiagramm dieses Zufallsexperiments und geben Sie den zugehörigen Ergebnisraum an.
9. In einem Kindergarten trinkt jedes der Kinder in der Frühstückspause genau eines der Getränke Kakao (K), Erdbeermilch (E) bzw. Vanillemilch (V). Veranschaulichen Sie das Wahlverhalten eines zufällig ausgewählten Kindes an zwei aufeinanderfolgenden Tagen in einem Baumdiagramm und geben Sie den zugehörigen Ergebnisraum an.
10. Die Glocken-Apotheke bietet ihren Kunden Hustensaft (H), Kopfschmerztabletten (K) und Nasenspray (N) an, wobei jeder entsprechende Kunde mindestens eines dieser Produkte erwirbt. Der Einkauf eines beliebig herausgegriffenen Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst; es werden auch nur diese drei Medikamente betrachtet. Erstellen Sie zu diesem Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und geben Sie den Ergebnisraum  $\Omega$  an. (FOS/BOS 12NT 2016 SI)
11. Der Pizzalieferdienst „Happy-Pizza“ feiert sein 10-jähriges Firmenjubiläum und bietet dazu seine Pizzen in den Größen Klein (K), Normal (N) und XXL (X) zu besonders günstigen Preisen an. Zu jeder Pizza kann man noch einen Salat (S) dazu bestellen. Um die XXL-Pizza stärker zu bewerben, bekommt man dazu gratis ein kleines Getränk (G) oder eine Dessert (D).

Erstellen Sie zu diesem Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und geben Sie den Ergebnisraum  $\Omega$  an. (*FOS/BOS 12NT 2018 SI*)