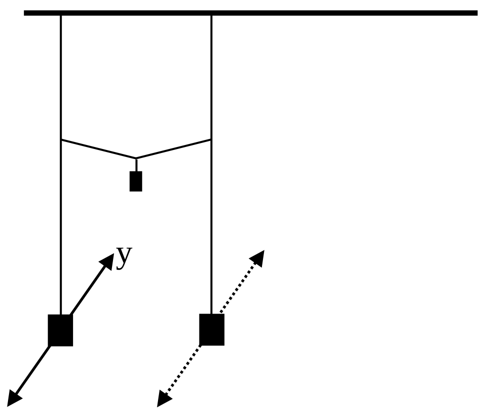
§ 11 Wellen

Wellen sind Erscheinungen, die wohl jeder aus seinem Lebensumfeld kennen dürfte. Man kennt Wasserwellen, Seilwellen und hat vielleicht auch schon mal was von Schallwellen, Lichtwellen, Radiowellen, …. gehört.

Aber was eine Welle aus physikalischer Sicht her gesehen ist, ist noch unbekannt.

11.1 Gekoppelte Pendel

An einer waagrechten Stange sind zwei (oder mehrere) Fadenpendel gleicher Länge befestigt und durch einen Faden (oder eine Feder) miteinander verbunden. Diese Pendel besitzen die gleiche Eigenfrequenz $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)$ und sind so aufgehängt, dass ihre Schwingungsebenen parallel verlaufen.

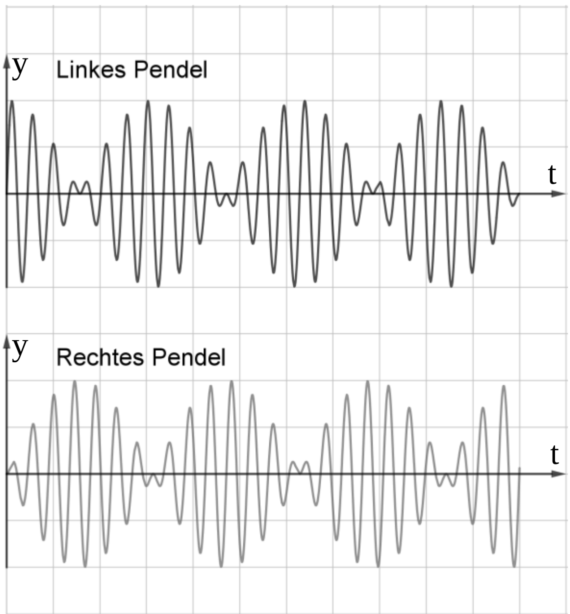


Nun wird das linke Pendel nach hinten angestoßen, es beginnt zu schwingen. Angeregt durch das linke Pendel wird auch das rechte Pendel ausgelenkt und beginnt ebenfalls zu schwingen.
Dabei nimmt die Amplitude des linken Pendels ab, bis es schließlich zur Ruhe kommt. Gleichzeitig nimmt aber die Amplitude des rechten Pendels zu.

Das linke Pendel hat somit seine gesamte Energie an das rechte Pendel abgegeben.

Nun wiederholt sich der Vorgang wieder mit vertauschten Rollen.

Video 1   Video 2



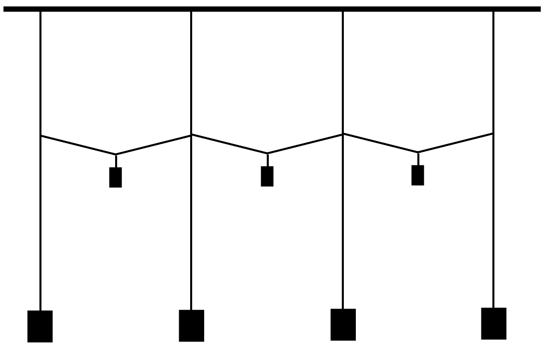
In nebenstehendem Diagramm ist der Verlauf der Schwingungen der beiden gekoppelten Pendel dargestellt. Man erkennt sehr gut, dass die Schwingungsamplitude des linken Pendels zunächst abnimmt und die des rechten Pendels zunimmt. Die Energie wurde vom linken auf das rechte Pendel übertragen.
Dann nimmt die Schwingungsamplitude des linken Pendels wieder zu und die des rechten Pendels ab. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch.

Man hätte übrigens das linke Pendel auch nach links auslenken können. Das Ergebnis wäre das selbe gewesen.

Video 3

11.2 Störungen

Nun koppelt man mehrere Pendel gleicher Länge hintereinander.
Stößt man nun das erste Pendel (linkes Pendel) nach hinten an, so beginnt es zu schwingen. Nach und nach geraten nun auch die anderen Pendel in Schwingung.



Video 4

Die Auslenkung des ersten Pendels aus der Ruhelage stellt eine Störung des eigentlich ruhenden Systems dar. Diese Störung wird nun von links nach rechts weitergegeben und breitet sich mit der sogenannten Ausbreitungsgeschwindigkeit $\vec{c}$ aus.

Definition:
Wird ein gekoppeltes System schwingungsfähiger, sich in Ruhe befindender Massen, an einer Stelle aus seiner Ruhelage ausgelenkt, so breitet sich diese Auslenkung (Störung) in alle Richtungen aus. Diesen Vorgang nennt man in der Physik eine Welle.

Somit transportiert eine Welle keine Materie sondern Energie $(\rightarrow$ Wellenkraftwerke$)$

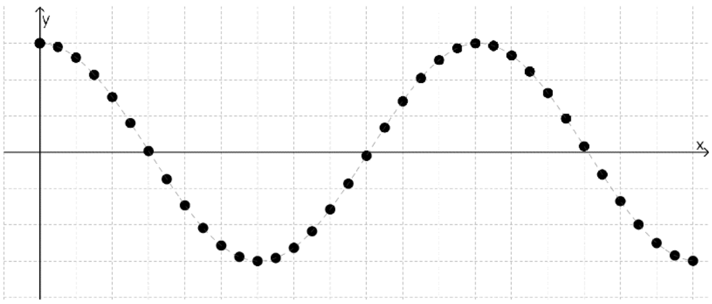
Video Nemos Video Limpert Video Pilamis Video Die Welle und ihre Physik

Koppelt man noch viel mehr Pendel hintereinander, so erhält man eine sogenannte „Wellenmaschine“. Mit deren Hilfe kann man sich nun ein sehr gutes Bild davon mache, was man in der Physik unter einer Welle versteht.

Video Wellenmaschine

Standbild

Standbild mathematisch idealisiert



Darauf werden wir aber später wieder zurückkommen!

11.3 Arten der Wellenerzeugung, Wellentypen und Wellenformen

Die Art bzw. Form der Welle (Wellenbild) hängt von seiner Erzeugung ab.

Einmalige kurze Auslenkung des Erregers

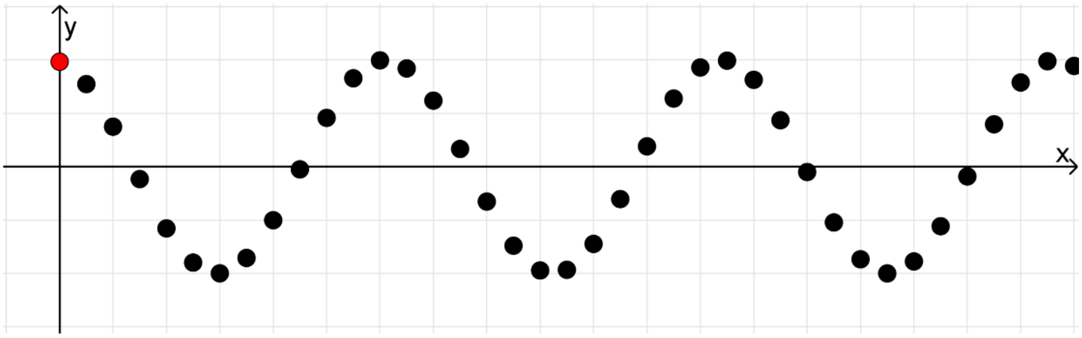
Video 5

Wird der einmalig ausgelenkt, so bewegt sich ein „Welle“ nach rechts.
Bei Auslenkung des Erregers in positiver Richtung bewegt sich ein Wellenberg, bei Auslenkung des Erregers in negativer Richtung bewegt sich ein Wellental nach rechts.

Periodische Auslenkung des Erregers

Versuch mit Wellenmaschine! Gegebra-File

Wird der Erreger periodisch nach oben und nach unten ausgelenkt, so bewegen sich Wellenberge und Wellentäler nach rechts.

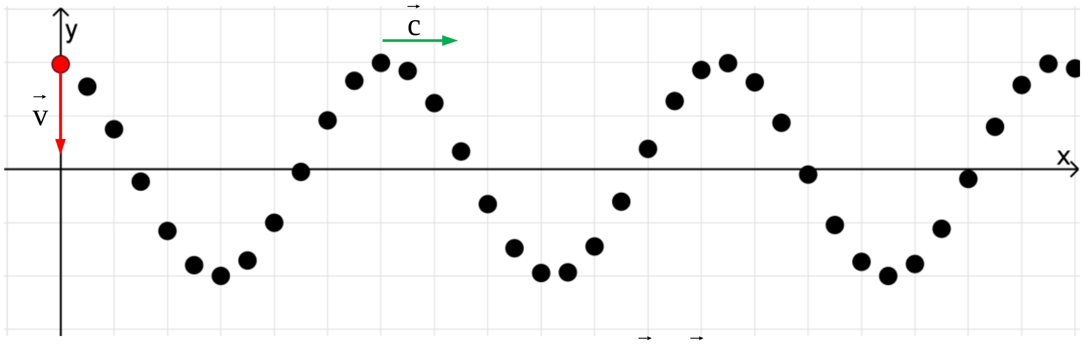


Standbild der Welle bei periodischer Anregung

Wellen lassen sich grundsätzlich zwei unterschiedliche Typen einteilen

Transversalwelle (Querwelle)

Bei obigem Beispiel erfolgt die Erregung $\vec{v}$ quer (senkrecht) zur Ausbreitungsrichtung der Wellenberge $\vec{c}$. Geogebra-File



Ein Transversalwelle liegt genau dann vor, wenn gilt: $\vec{v} \perp \vec{c}$
Beispiele für Transversalwellen: Wasserwellen, Seilwellen (Seite einer Gitarre), Elektromagnetische Wellen.

Wir werden uns im Weiteren nur mit Transversallwellen beschäftigen.

Longitudinalwellen (Längswellen)

Bei Longitudinalwellen erfolgt die Erregung $\vec{v}$ längs (parallel) zur Ausbreitungsrichtung der Wellenberge $\vec{c}$. Geogebra-File

Mechanische Longitudinalwellen können sich in jedem Medium, ob fest, flüssig oder gasförmig ausbreiten.

Ein Longitudinalwelle liegt genau dann vor, wenn gilt: $\vec{v} \parallel \vec{c}$
Beispiele für Longitudinalwellen: Schall (Luftmoleküle stoßen elastisch aneinander), Gitterschwingungen.

Wir werden uns im Weiteren nicht mit Longitudinalwellen beschäftigen.

Und hier noch ein Video 6 zu Transversal- und Longitudinalwellen.

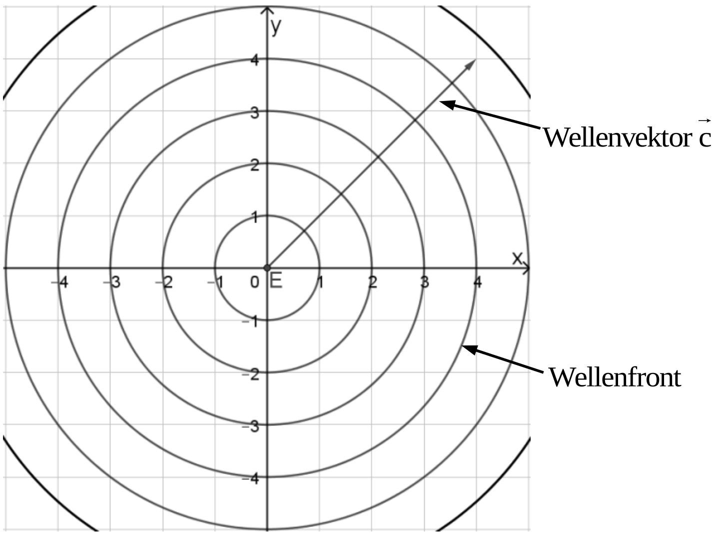
Wenn sich eine Welle ausbreitet, können sich unterschiedliche Wellenfronten ergeben. Dies hängt von der Art der Erregung ab. Eine Wellenfront stellt entweder immer Wellenberge oder Wellentäler dar.

Kreiswellenfront

Ein punktförmiger Erreger, der periodisch an einer Wasseroberfläche aus- und eintaucht erzeugt kreisförmige Wellenfronten.

Video 7 Video 8

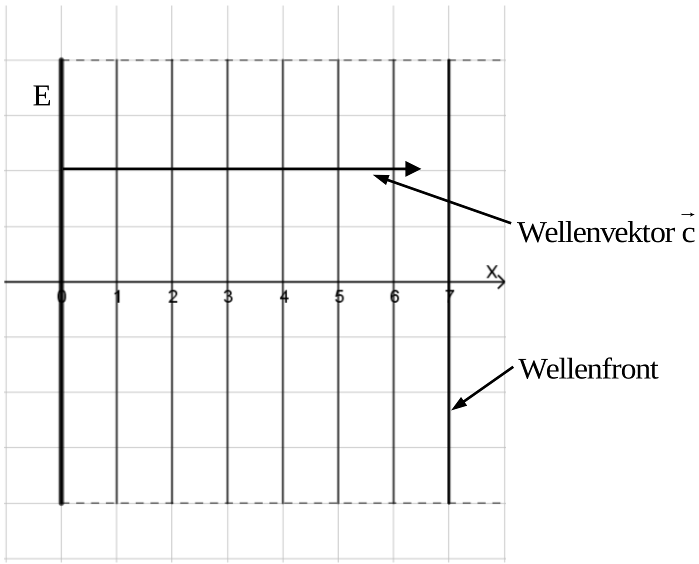
Die Wellenvektoren (auch Wellenstrahlen genannt) verlaufen sternförmig vom Zentrum radial nach außen.



Ebene Wellenfront

Ein gerader länglicher Erreger, der sich periodisch bewegt erzeugt ebene Wellenfronten.

Die Wellenvektoren (auch Wellenstrahlen genannt) verlaufen parallel und stehen dabei senkrecht auf dem Erreger.

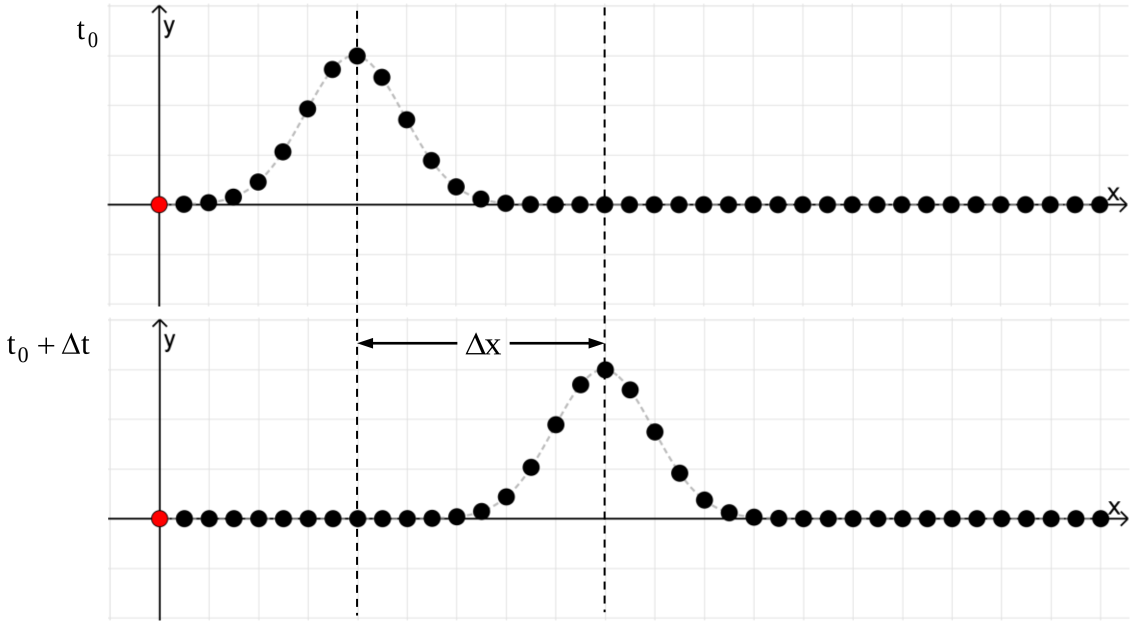


11.4 Die Phasengeschwindigkeit c und die Wellenlänge λ

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle nennt man auch Phasengeschwindigkeit.

Somit ist die Phasengeschwindigkeit c die Geschwindigkeit, mit welcher sich eine Störung (oder ein Wellenberg!) in x-Richtung ausbreitet.

Wellenbild zum Zeitpunkt:

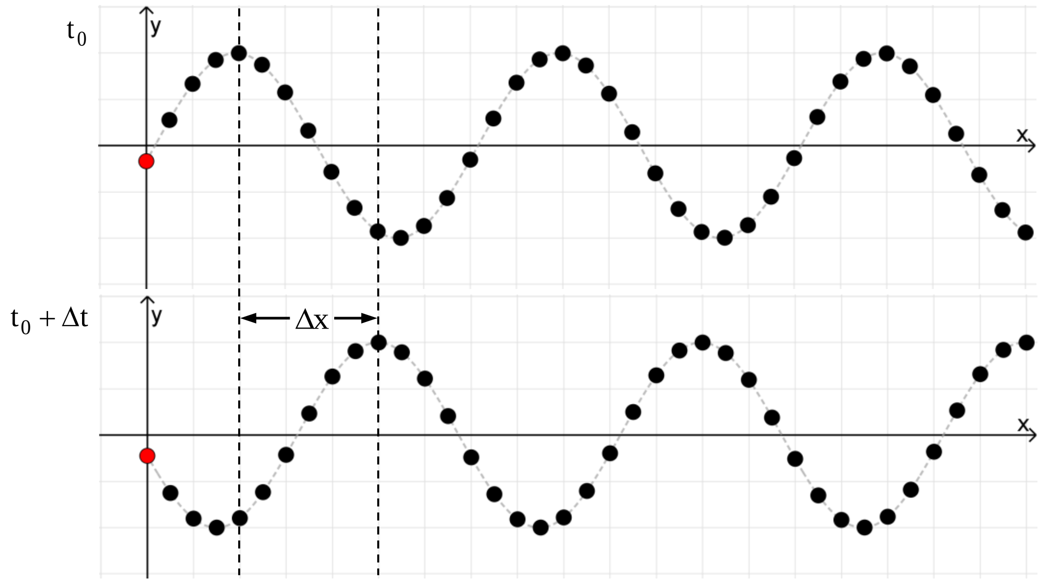


Dabei gilt:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

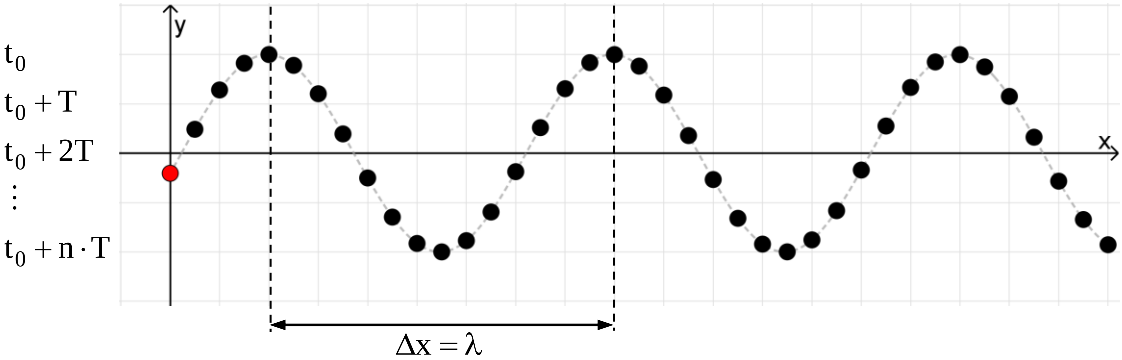
Das gilt aber auch bei periodischer Auslenkung des Erregers. Auch hier bewegt sich die Welle (Wellenberg!) nach rechts mit der Phasengeschwindigkeit (Ausbreitungsgeschwindigkeit) c.

Wellenbild zum Zeitpunkt:



Bei letzterem Wellenbild (mit periodischer Auslenkung des Erregers) erhält man nach einer bestimmten Zeit immer wieder dasselbe Wellenbild. Diese Zeit ist die bereits bekannte Schwingungsdauer T.

Wellenbild zum Zeitpunkt:



In diesem Fall bezeichnet man den Abstand zweier Wellenberge (oder auch Wellentäler) als die sogenannte Wellenlänge λ.

Etwas allgemeiner ist die Wellenlänge λ so formuliert: Die Wellenlänge ist der kürzeste Abstand zweier Teilchen des Wellenträgers mit gleicher Schwingungsphase.

Somit folgt nun mit $\Delta t = T$ und $\Delta x = \lambda$ für die Phasengeschwindigkeit c der Welle:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \qquad \text{(Wellengleichung)}$$

Eine wichtige Beziehung, welcher wir später noch benötigen.

Bemerkung: Die Phasengeschwindigkeit hängt nicht von der Wellenlänge λ oder der Frequenz f ab. Sie hat nur Einfluss darauf. Die Phasengeschwindigkeit hängt in der Regel von der Stärke der elastischen Kopplung der schwingungsfähigen Systeme des Mediums ab (molekulare Kräfte), in welchem sich die Welle ausbreitet.

So gilt für die Phasengeschwindigkeit in

Eisen: $c_{Fe} = 5{,}2\,\frac{km}{s}$

Luft: $c_{Luft} = 342\,\frac{m}{s}$ (Schallgeschwindigkeit)

Wasser: $c_{H_2O} = 1{,}4\,\frac{km}{s}$

Licht: $c_{Licht} = 3{,}0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$ (Lichtgeschwindigkeit)

Übung: Eine Schallwelle mit einer Frequenz von $f = 100\,\text{Hz}$ (Brummen eines alten Lautsprechers) hat die Wellenlänge:

$$c_{Schall} = \lambda \cdot f \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c_{Schall}}{f} = \frac{342\,\frac{m}{s}}{100\,\frac{1}{s}} = 3{,}42\,\text{m}$$

Das menschliche Gehör nimmt Schallwellen im Frequenzbereich von 20 Hz bis 20 kHz war. Bestimmen Sie den entsprechenden Wellenlängenbereich?

11.5 Die Wellenfunktion

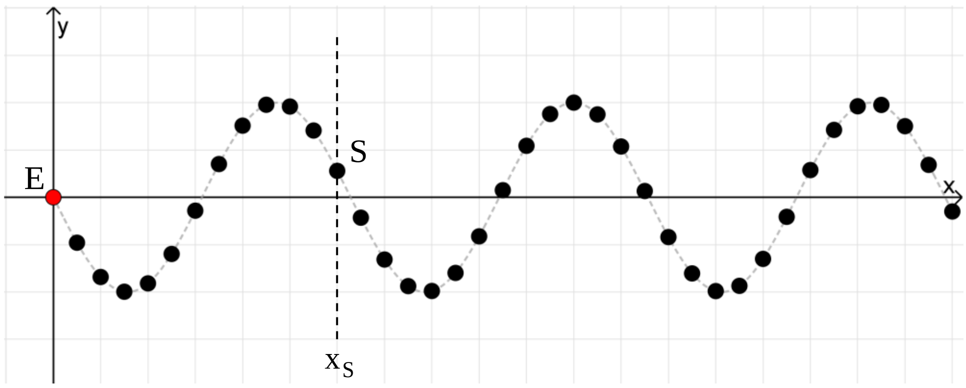
Wir wollen nun die Wellenausbreitung bei periodischer Erregung mathematisch in eine Gleichung fassen.

Grundlegend gehen wir einmal davon aus, dass ein Erreger E eine Reihe weiterer schwingunsfähiger Systeme in harmonische Schwingungen versetzt.
Wird also der Erreger E aus der Ruhelage nach oben ausgelenkt, so erreicht diese „Störung“ zu einem bestimmten Zeitpunkt, also etwas zeitverzögert den „Punkt“ S, der dann ebenfalls beginnt harmonisch zu schwingen.
Unser Ziel wird es nun sein, eine Zeit-Orts-Funktion zu finden, welche die harmonische Schwingung eines Körpers S im Abstand x_S vom Erreger beschreibt.

Um die Herleitung zu vereinfachen gelten folgende Einschränkungen:

- Der Erreger befindet sich am Ort $x_E = 0$.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ bewegt sich der Erreger durch die Ruhelage in Richtung positiver Elongation. Somit gilt für die Zeit-Orts-Funktion des Erregers: $y_E = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$
- Es wird nur der Teil einer Welle betrachtet, der sich in Richtung der positiven x-Achse mit der Wellengeschwindigkeit vom Betrag c ausbreitet.
- Der Erreger schwingt bereits längere Zeit, sodass die entstehende Welle bereits den gesamten Wellenträger erfasst hat.

Betrachten wir nun die Störung am Ort x_S.



Aufgrund der Kopplung der Teilchen wandert die Störung mit der Geschwindigkeit c entlang der positiven x-Achse. Der Köper S empfängt die vom Erreger ausgehende Störung an der Stelle x_S nach der Zeit Δt. Also gilt:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{c} \quad \overset{\Delta x = x_S - 0}{\Rightarrow} \quad \Delta t = \frac{x_S}{c} \quad (1)$$

Der Körper S schwingt also (im Vergleich zum Erreger E) um die Zeit Δt verspätet an. Somit gilt für die Zeit-Orts-Funktion des Körpers S

$$y_S(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot (t - \Delta t))$$

Setzt man nun Gleichung (1) ein, so folgt:

$$y_S(t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x_S}{c}\right)\right)$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ folgt:

$$y_S(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \left(t - \frac{x_S}{c}\right)\right)$$

$$y_S(t) = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_S}{c \cdot T}\right)\right) \qquad (2)$$

Nun gilt: $c = \lambda \cdot f \quad \Rightarrow \quad c = \lambda \cdot \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad c \cdot T = \lambda$

Eingesetzt in Gleichung (2), so erhält man:

$$y_S(t) = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_S}{\lambda}\right)\right)$$

Die Zeit-Orts-Funktion des Körpers S an der Stelle x_S (bzw. in einer Entfernung von x_S vom Erreger).

Da sich aber der Körper S an jeder beliebigen Stelle x befinden kann, so gilt ganz allgemein:

$$\boxed{y(t;x) = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)}$$

Das ist die Wellengleichung einer in positiver x-Richtung fortschreitenden harmonischen Welle.

Für eine in negative x-Richtung fortschreitende harmonische Welle gilt:

$$\boxed{y(t;x) = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right)}$$

Das ist nun (mathematisch) mal ganz was Neues. Man hat jetzt eine Funktion, die nicht mehr nur von einer Variablen x abhängt sondern auch noch von einer zweiten Variablen t.

Was das nun bedeutet bzw. was man damit alles „anstellen“ kann wollen wir an einem Beispiel verdeutlichen.

Beispiel: Gegeben ist die Wellenfunktion $y(t;x) = 3{,}0\,\text{cm} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{2{,}0\,\text{s}} - \frac{x}{4{,}0\,\text{cm}}\right)\right)$

a) Geben Sie an, in welche Richtung sich die Welle ausbreitet.

Die Welle breitet sich nach rechts aus (wegen dem „Minuszeichen“ in der Klammer).

b) Geben Sie die Wellenlänge λ der Welle sowie die Periodendauer T der harmonischen Schwingung an.

Wellenlänge: $\lambda = 4{,}0\,\text{cm}$
Periodendauer: $T = 2{,}0\,\text{s}$

c) Berechnen Sie die Phasengeschwindigkeit c der Welle.

$$c = \lambda \cdot f = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \frac{\lambda}{T} = \frac{4{,}0\,\text{cm}}{2{,}0\,\text{s}} = 2{,}0\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}}$$

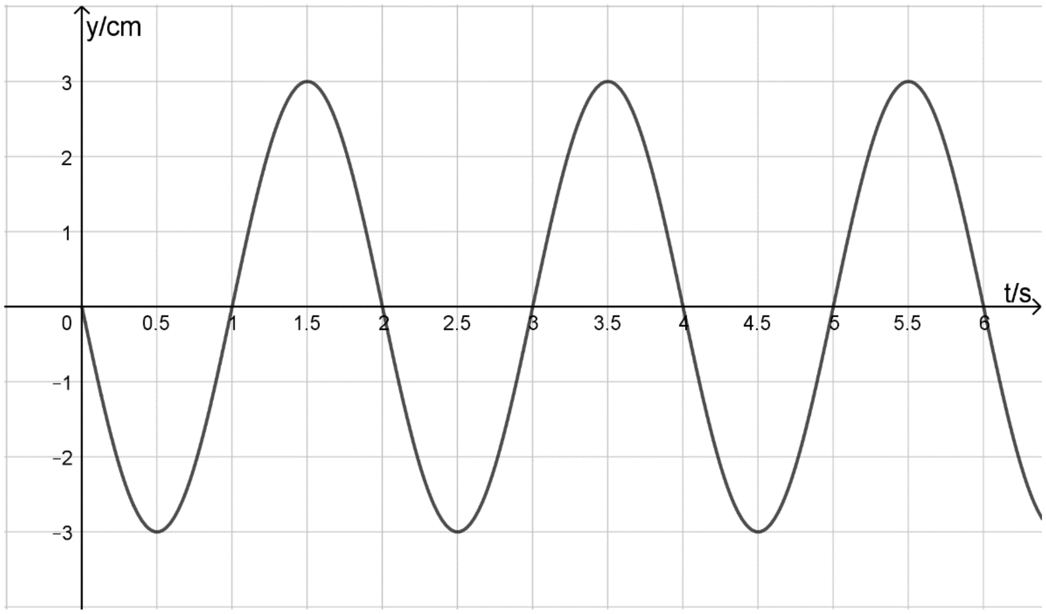
d) Nach welcher Zeit erreicht eine vom Erreger ausgehende Störung einen Körper, der vom Erreger eine Entfernung von $x = 6{,}0\,\text{cm}$ besitzt.

Es gilt: $c = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{c} = \frac{6{,}0\,\text{cm}}{2{,}0\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}} = 3{,}0\,\text{s}$

d) Geben Sie die Zeit-Orts-Funktion des Körpers an, der sich in einer Entfernung von $x = 6{,}0\,\text{cm}$ vom Erreger befindet und zeichnen Sie den dazugehörigen Funktionsgraphen.

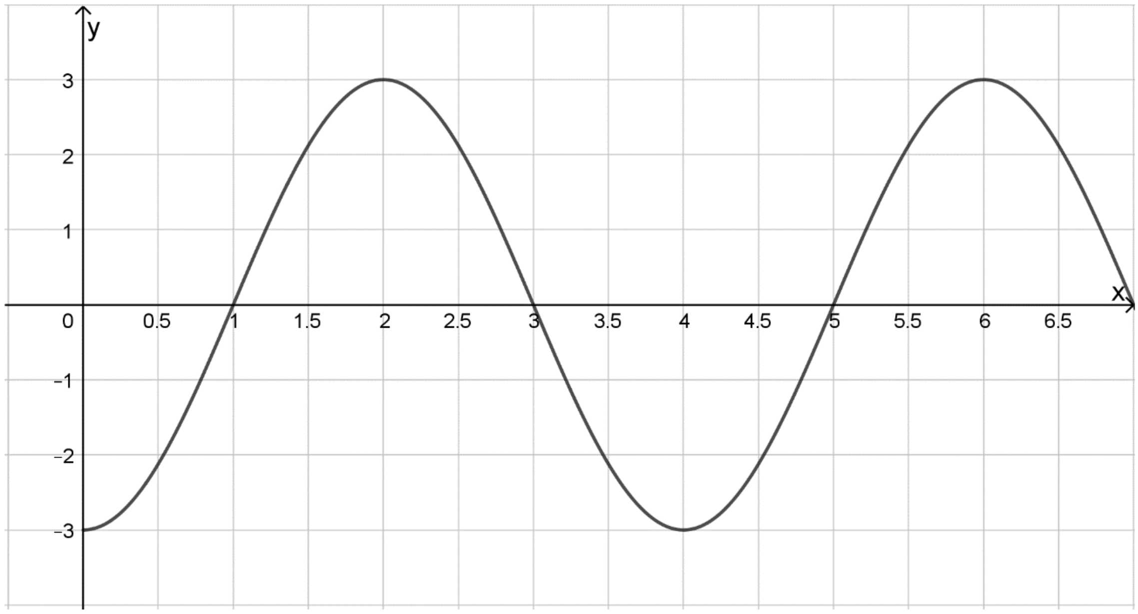
Mit Hilfe der Wellengleichung folgt:

$$y(t;6{,}0\,\text{cm}) = 3{,}0\,\text{cm} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{2{,}0\,\text{s}} - \frac{6{,}0\,\text{cm}}{4{,}0\,\text{cm}}\right)\right) = 3{,}0\,\text{cm} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{2{,}0\,\text{s}} - 1{,}5\right)\right)$$



e) Ermitteln Sie einen Funktionsterm, welcher das Wellenbild nach einer Zeit von $t = 1{,}5\,s$ beschreibt und zeichnen Sie das zugehörige Bild der Welle (Standbild!)

$$y(1{,}5s; x) = 3{,}0\,cm \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{1{,}5s}{2{,}0s} - \frac{x}{4{,}0\,cm}\right)\right) = 3{,}0\,cm \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(0{,}75 - \frac{x}{4{,}0\,cm}\right)\right)$$



Aufgaben

1. Eine Seilwelle $(f = 10\,Hz)$ breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit von $c = 2{,}0\,\frac{m}{s}$ aus. Zur Zeit $t = 0\,s$ herrscht im Koordinatenursprung die maximale Auslenkung von $y_{max} = 10\,cm$.
Berechnen Sie die Auslenkung nach einer Zeit von $t = 2{,}0\,s$ im Abstand von 3,0 m.

2.0 Erfolgt die Anregung einer Welle harmonisch, ergibt sich eine harmonische Welle mit der folgenden Funktionsgleichung $y(t; x) = y_{max} \cdot \sin(\omega t - kx)$ mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.
Gegeben ist die Amplitude $y_{max} = 20\,cm$, die Frequenz $f = 4{,}0\,kHz$ und die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 0{,}50\,\frac{m}{s}$ der harmonischen Welle.

2.1 Bestimmen Sie jeweils die Elongation $y(t; x)$ am Ort x zum Zeitpunkt t
   a) $x = 0\,cm$; $t = 0\,s$
   b) $x = 40\,cm$; $t = 1{,}0\,s$

2.2 Bestimmen Sie alle Stellen x, an welchen sich zum Zeitpunkt t ein Wellenberg befindet.
   a) $t = 0\,s$
   b) $t = 1{,}0\,s$

3.0 Ein harmonisch schwingender Erreger erzeugt in einer Wellenwanne eine Wasserwelle mit geraden Wellenfronten. Die Wellenbewegung hat bereits alle Punkte der Wasseroberfläche erfasst. Die x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems verläuft horizontal und senkrecht zu den Wellenfronten, die y-Achse des Koordinatensystems ist vertikal nach oben gerichtet. Der Erreger der Wasserwelle befindet sich an der Stelle $x_0 = 0\,\text{cm}$ und bewegt sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ gerade durch die Nulllage nach oben. Die Welle, die sich vom Erreger aus in positiver x-Richtung ausbreitet, lässt sich durch folgende Wellenfunktion beschreiben:

$$y(t;x) = 0{,}70\text{cm} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{0{,}40\text{s}} - \frac{x}{6{,}0\text{cm}}\right)\right]$$

3.1 Berechnen Sie die Frequenz f der Erregerschwingung und den Betrag c der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle aus den Daten der Wellengleichung.

3.2.1 Zeichnen Sie für den Zeitpunkt $t_1 = 0{,}30\,\text{s}$ das Momentanbild der Welle im Bereich $0\,\text{cm} \le x \le 12\,\text{cm}$. $\left(\text{Maßstab y} - \text{Achse} : 1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 4\,\text{cm}\right)$

3.2.2 P_1 sei ein Punkt an der Wasseroberfläche mit der x-Koordinate $x_P = 10{,}0\,\text{cm}$.
Berechnen Sie für den Zeitpunkt $t_1 = 0{,}30\,\text{s}$ den Betrag der Geschwindigkeit v_1 des Punktes P_1. Zeichnen Sie den Geschwindigkeitsvektor in das Momentanbild ein.
(Verwenden Sie dabei den Maßstab: $5{,}0\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$ 5,0 cm/s)

3.2.3 Zeichnen Sie auch den Vektorpfeil für die Geschwindigkeit v_2 $\left(0{,}30\text{s}; 1{,}5\text{ cm}\right)$ und v_3 $\left(0{,}30\text{s}; 3{,}0\text{ cm}\right)$ ein.

4.0 Eine harmonische Schwingung $y(t) = y_{max} \cdot \sin(\omega t)$ breitet sich vom Nullpunkt als transversale Störung in Richtung der positiven x-Achse mit der Geschwindigkeit $c = 0{,}75\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ und mit einer Amplitude von $A = 10\,\text{cm}$ aus. Die Kreisfrequenz beträgt $f = \frac{\pi}{2}\,\text{Hz}$.

4.1 Berechnen Sie die Periodendauer T, die Frequenz f und die Wellenlänge λ und geben Sie die zugehörige Wellengleichung mit eingesetzten Zahlenwerten an.

4.2 Zeichnen Sie das maßstabsgetreue Momentanbild der Störung nach $t_1 = 4{,}0\,\text{s}$, $t_2 = 6{,}0\,\text{s}$ und $t_3 = 9{,}0\,\text{s}$ in ein x-y-Koordinatensystem für $0 \le x \le 7{,}0\text{cm}$.
$\left(\text{Maßstab y} - \text{Achse} : 1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 10\,\text{cm}\right)$

4.3 Geben Sie die Schwingungsgleichungen für die Oszillatoren an, die an den Orten $x_1 = 5{,}25\,\text{cm}$ und $x_2 = 7{,}5\,\text{cm}$ von der Störung erfasst werden. Qualitative Zeichnung!

5. Laut Formelsammlung gilt für die Darstellung einer fortschreitenden mechanischen Welle

$$y(t;x) = A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Zeigen Sie, dass sich die Gleichung auch in der Form

$$y(t;x) = A \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

darstellen lässt.

6.0 Eine Transversalwelle hat die Wellenlänge $\lambda = 8{,}0\,\text{cm}$, die Schwingungsdauer $T = 2{,}0\,\text{s}$ und die Amplitude $A = 5{,}0\,\text{cm}$. Das Teilchen bei $x = 0\,\text{cm}$ befindet sich zur Zeit $t = 0\,\text{s}$ im oberen Umkehrpunkt. Die Welle breitet sich nach rechts in Richtung positiver x-Werte aus.

6.1 Berechnen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle.

6.2 Geben Sie die Wellenfunktion $y(t;x)$ mit eingesetzten Zahlenwerten an.

6.3 Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit eines Teilchens an der Stelle $x = 16\,\text{cm}$ zur Zeit $t = 0{,}50\,\text{s}$ und berechnen Sie $y(0{,}50\,\text{s}; 16\,\text{cm})$.

7.0 Eine transversale Störung breitet sich vom Nullpunkt entlang der positiven x-Achse mit der Geschwindigkeit $c = 1{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ aus. Der Erreger schwingt harmonisch mit einer Amplitude von $A = 1{,}0\,\text{cm}$ und der Periodendauer $T = 4{,}0\,\text{s}$. Die Störung geht zur Zeit $t = 0\,\text{s}$ durch die Ruhelage nach unten.

7.1 Berechnen Sie den Betrag der Wellenlänge λ und geben Sie die Wellenfunktion mit eingesetzten Zahlenwerten an.

7.2 Zeichnen Sie das Momentanbild der Störung für $t_1 = 7{,}0\,\text{s}$ und $t_2 = 10{,}0\,\text{s}$.

7.3 Bestimmen Sie die Schwingungsgleichungen für die Teilchen bei $x_1 = 3{,}0\,\text{cm}$ und $x_2 = 9{,}0\,\text{cm}$.

7.4 Zeichnen Sie jeweils die Auslenkung (Elongation) dieser Teilchen in Abhängigkeit von der Zeit für $0 \le t \le 12\,\text{s}$.

7.5 Ermitteln Sie aus den Diagrammen von 7.2 und 7.4 Aussagen zur Momentangeschwindigkeit v_1 und v_2 der Teilchen („Schnelle“) für $y_1\ (3{,}0\,\text{cm}; 7{,}0\,\text{s})$ und $y_1\ (9{,}0\,\text{cm}; 10\,\text{s})$.
Führen Sie für v_1 und v_2 eine Kontrollrechnung durch.

8.0 Durch einen geradlinigen, harmonisch schwingenden Erreger werden in einer Wellenwanne Wasserwellen mit geradlinigen Wellenfronten erzeugt. Der Erreger befindet sich am linken Rand der Wanne, die Wellen breiten sich nach rechts aus. Eine Reflektion an den Wänden der Wanne wird durch eine geeignete Vorrichtung vermieden. Wegen der unvermeidlichen Störungen um den Erreger wird ein Teilchen im Abstand von 5,0 cm als Ursprung betrachtet $(x_0 = 0)$. Ein Schnitt senkrecht zu den Wellenfronten lässt sich in positiver Richtung durch die Gleichung

$$y(t;x) = 5{,}0\ \text{mm} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{0{,}40\ \text{s}} - \frac{x}{5{,}0\ \text{cm}}\right)\right]$$

beschreiben.

8.1 Berechnen Sie die Frequenz der schwingenden Wasserteilchen sowie die Phasengeschwindigkeit der Welle aus den Daten der Wellengleichung.

8.2 Skizzieren Sie ein Momentanbild der Welle für den Zeitpunkt $t_1 = 0{,}50\,\text{s}$ im Bereich $0 \le x \le \frac{3}{2}\lambda$.

8.3 Berechnen Sie für den Zeitpunkt $t_1 = 0{,}50\,\text{s}$ die Elongation des an der Stelle P $(x_P = 2{,}0\,\text{cm})$ schwingenden Teilchens und berechnen Sie dessen Geschwindigkeit v_P.

8.4 Ermitteln Sie den Ort x eines Teilchens, das als erstes rechts von P gleichphasig bzw. gegenphasig schwingt.

11.6 Reflexion von Wellen

Wir sind bis jetzt immer davon ausgegangen, dass sich eine Störung (unendlich) ohne Hindernis ausbreitet. In Wirklichkeit trifft aber diese Störung immer an ein Hindernis (z. Bsp. das Ende eines Seils). Das heißt, dass sich hier die Störung nicht mehr in dieselbe Richtung ausbreiten kann wie bisher. Doch was passiert nun mit der Störung, wenn sie an ihr „Ende“ trifft?

Grundlegend muss man dabei zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall: Störung trifft auf ein „festes Ende“
Trifft eine von links nach rechts laufende Störung auf ein festes Ende, so wird sie dort reflektiert und läuft zurück. Ein Wellenberg wird dabei als Wellental reflektiert (Phasenumkehr bzw. Phasensprung).
Beispiel: Seilwelle breitet sich aus und trifft auf ein festes Ende (Seil ist am anderen Ende angebunden!).
Video1 Seil mit festem Ende
Video2 Seil mit festem Ende

2. Fall: Störung trifft auf ein „loses Ende“
Trifft eine von links nach rechts laufende Störung auf ein loses Ende, so wird sie dort reflektiert und läuft ebenfalls zurück. Ein Wellenberg wird dabei auch als Wellenberg reflektiert.
Beispiel: Seilwelle breitet sich aus und trifft auf ein loses Ende (Seil ist am anderen Ende frei beweglich!).

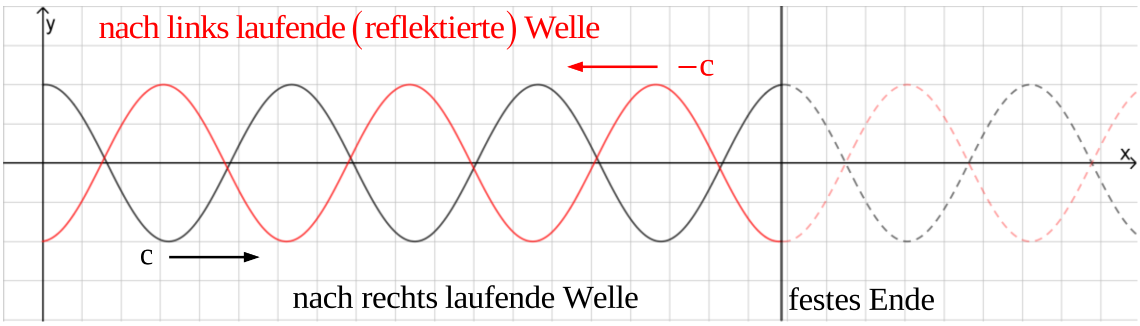
Animation LEIFI-Physik
Video zu Reflexion von Wellen

11.7 Interferenz von Wellen

Wir wollen aber nun nicht nur eine einzige Störung, sondern eine sich ausbreitende Welle betrachten, die auf ein loses bzw. festes Ende trifft.

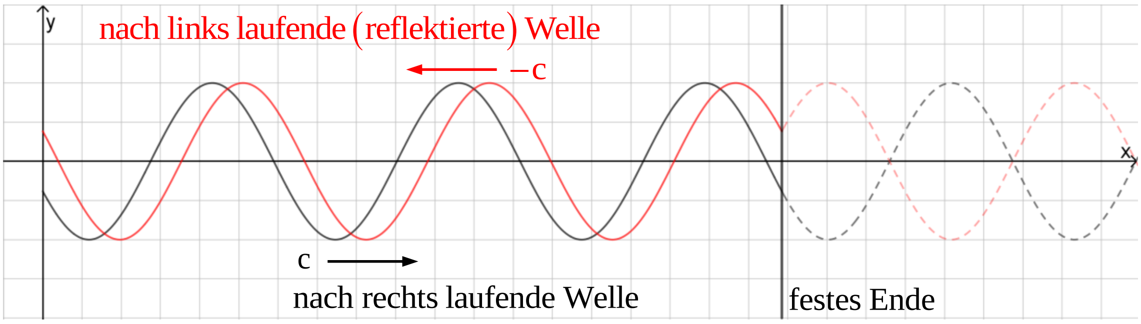
1. Fall. Welle trifft auf ein „festes Ende“
Trifft eine von links nach rechts laufende Welle auf ein festes Ende, so wird sie dort reflektiert und läuft zurück. Die zurücklaufende Welle hat dabei einen Phasensprung, d.h. ein Wellenberg der einlaufenden Welle wird bei der zurücklaufenden Welle zu einen Wellental.

Das Wellenbild der nach rechts laufenden und der reflektierten nach links laufenden Welle sieht dann so aus. Ein Wellenberg wird zu einem Wellental!



Dass ein Wellenberg zu einem Wellental wird, funktioniert nur dann so, wenn man ein Wellenbild betrachtet in welchem ein Wellenberg gerade auf das feste Ende trifft.

Doch wie erhält man das Wellenbild der reflektierten Welle ganz allgemein?
Dazu stellt man sich einfach vor, dass die nach rechts laufende Welle über das feste Ende hinweg weiter laufen würde (gestrichelte schwarze Linie). Diese spiegelt man nun an der x-Achse (→ gestrichelte rote Linie) und dann an dem „festem Ende". Dann erhält man das Wellenbild der nach links laufenden (reflektierten Welle) Welle (rote Linie)



Für die nach rechts laufende Welle gilt die Wellenfunktion:

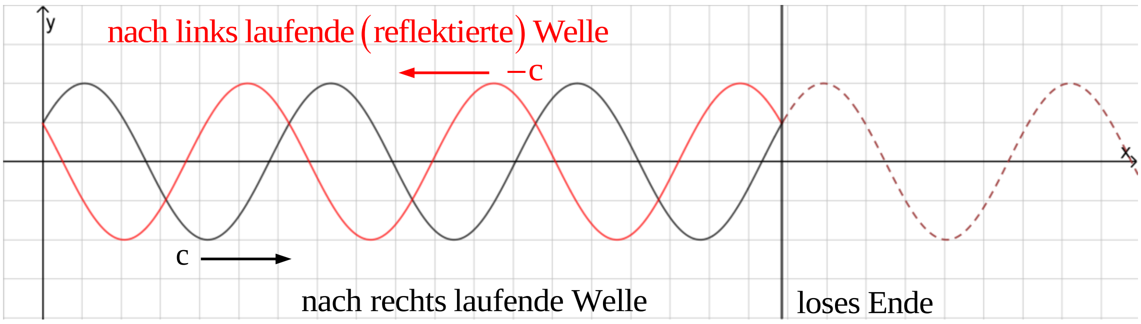
$$y_r(t;x) = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Für die nach links laufende Welle gilt dann:

$$y_l(t;x) = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

2. Fall. Welle trifft auf ein „loses Ende"
Trifft eine von links nach rechts laufende Welle auf ein loses Ende, so wird sie dort reflektiert und läuft ebenfalls zurück. Die zurücklaufende Welle hat dabei keinen Phasensprung, d.h. ein Wellenberg der einlaufenden Welle wird bei der zurücklaufenden Welle zu einen Wellenberg.

Doch wie erhält man das Wellenbild der an einem losen Ende reflektierten Welle ganz allgemein?
Dazu stellt man sich einfach vor, dass die nach rechts laufende Welle über das feste Ende hinweg weiter laufen würde (gestrichelte schwarze Linie). Diese spiegelt nun nur an dem „festem Ende". Dann erhält man das Wellenbild der nach links laufenden (reflektierten Welle) Welle (rote Linie)



Für die nach rechts laufende Welle gilt die Wellenfunktion:

$$y_r(t;x) = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Für die nach links laufende Welle gilt dann:

$$y_l(t;x) = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

[App von Walter Fendt zu Wellen mit losem und festem Ende] [Video SimpleClub]

Obiges Wellenbild aus nach rechts laufender (einlaufender) und nach links laufender (reflektierter) Welle wird man so in der Wirklichkeit allerdings nicht sehen, da es real zu einer Interferenz kommt. Das heißt, dass sich die beiden Wellen überlagern (ungestörte Überlagerung).
Für diese Überlagerung gilt das sogenannte „Superpositionsprinzip“. Dabei addieren sie die Elongationen der beiden Wellen vektoriell.
Für die durch diese Superposition entstehende Welle gilt dann:

$$y_s(t;x) = y_r(t;x) + y_l(t;x)$$

Nun setzt man die beiden Wellenfunktionen ein

$$y_s(t;x) = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) + A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

$$y_s(t;x) = A \cdot \left[\sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) + \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right)\right]$$

Um die beiden Summanden zusammen zu fassen benötigt man nun ein Additionstheorem aus der Mathematik. In einer Formelsammlung findet man dazu folgende Gleichung

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Somit folgt mit $\alpha = 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ und $\beta = 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$

$$y_s(t;x) = A \cdot 2\sin\left(\frac{2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)}{2}\right)$$

$$y_s(t;x) = 2A \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot \left(\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot \left(\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right)}{2}\right)$$

$$y_s(t;x) = 2A \cdot \sin\left(\pi \cdot \left(\left(\tfrac{t}{T} - \tfrac{x}{\lambda}\right) + \left(\tfrac{t}{T} + \tfrac{x}{\lambda}\right)\right)\right) \cdot \cos\left(\pi \cdot \left(\left(\tfrac{t}{T} - \tfrac{x}{\lambda}\right) - \left(\tfrac{t}{T} + \tfrac{x}{\lambda}\right)\right)\right)$$

$$y_s(t;x) = 2A \cdot \sin\left(\pi \cdot \left(\tfrac{t}{T} - \tfrac{x}{\lambda} + \tfrac{t}{T} + \tfrac{x}{\lambda}\right)\right) \cdot \cos\left(\pi \cdot \left(\tfrac{t}{T} - \tfrac{x}{\lambda} - \tfrac{t}{T} - \tfrac{x}{\lambda}\right)\right)$$

$$y_s(t;x) = 2A \cdot \sin\left(\pi \cdot \left(2\tfrac{t}{T}\right)\right) \cdot \cos\left(\pi \cdot \left(-2\tfrac{x}{\lambda}\right)\right)$$

$$y_s(t;x) = 2A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \tfrac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(-2\pi \cdot \tfrac{x}{\lambda}\right)$$

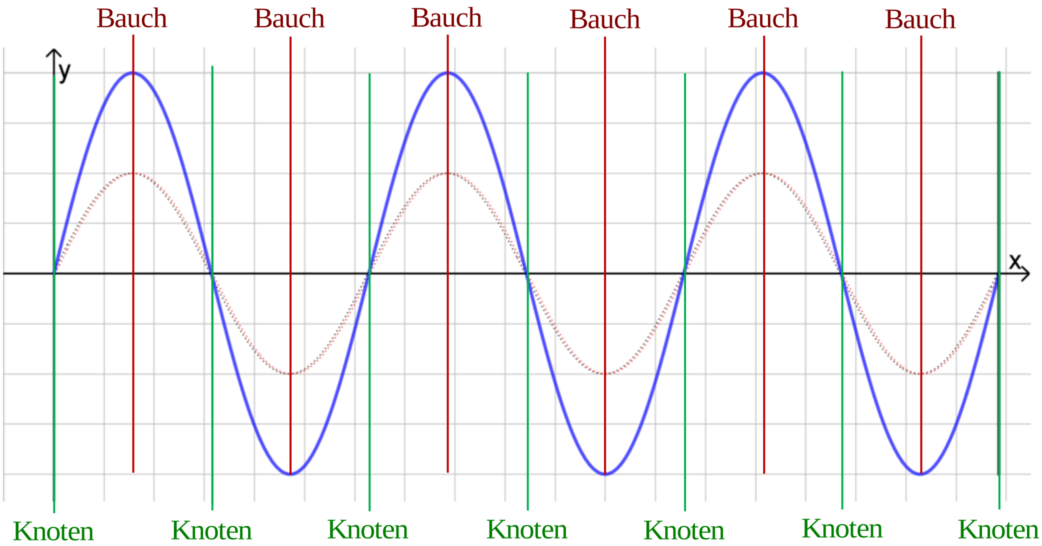
$$y_s(t;x) = 2A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \tfrac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \tfrac{x}{\lambda}\right)$$

Nach einigen Umformungen erhält man somit die Wellenfunktion einer „stehenden“ Welle:

$$y_s(t;x) = 2A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \tfrac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \tfrac{x}{\lambda}\right)$$

Nun sind die Ortskoordinate x und die Zeit t voneinander entkoppelt, da sie nicht mehr im Argument ein und derselben Winkelfunktion vorkommen.
Der Term $\sin\left(2\pi \cdot \tfrac{t}{T}\right)$ beschreibt nur das zeitliche Verhalten eines „Schwingungsteilchens“ am Ort x. Dessen Amplitude ist zeitunabhängig, sie hat den Wert $2A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \tfrac{x}{\lambda}\right)$.

Das Wellenbild einer „stehenden“ Welle sieht dann so aus:



Dieses Wellenbild ergibt sich allerdings nur, wenn der Abstand zwischen Erreger und der Stelle der Reflexion ein Vielfaches der Wellenlänge λ ist.

Bemerkung: Sollte die Bedingung nicht erfüllt sein, so bildet sich auch keine stehende Welle aus. Die Welle, die sich aus der Überlagerung der nach rechts mit der nach links laufenden Welle ergibt sieht sehr chaotisch aus. Es kann sogar sein, dass die nach rechts laufende Welle und die nach links laufende Welle sich gegenseitig aufheben.

Für die stehende Welle gilt:
Die Stellen, an denen die stehende Welle keine Auslenkung besitzt (die sogenannten Nullstellen!) nennt man Knoten. Für sie gilt:

$$y_s(t;x) = 2A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \tfrac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \tfrac{x}{\lambda}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\left(2\pi \cdot \tfrac{x}{\lambda}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi \cdot \tfrac{x}{\lambda} = (2n+1) \cdot \tfrac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_n = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{4}$$

$n = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{\lambda}{4}$

$n = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3\lambda}{4}$

$n = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{5\lambda}{4}$

$n = 3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{7\lambda}{4}$

$\vdots$

Zwei benachbarte Knoten haben somit immer einen Abstand von $\frac{\lambda}{2}$.

Die Stellen, an denen die stehende Welle maximale Auslenkung besitzt (Hoch- oder Tiefpunkte) nennt man Bäuche. Für sie gilt:

$$y_s(t;x) = 2A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \tfrac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \tfrac{x}{\lambda}\right) = \pm 2A \quad \Rightarrow \quad \cos\left(2\pi \cdot \tfrac{x}{\lambda}\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad 2\pi \cdot \tfrac{x}{\lambda} = n \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \quad x_n = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$n=0 \Rightarrow x_0 = 0$

$n=1 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{2}$

$n=2 \Rightarrow x_2 = \lambda$

$n=3 \Rightarrow x_3 = \frac{3\lambda}{2}$

$\vdots$

Zwei benachbarte Bäuche haben somit immer einen Abstand von $\frac{\lambda}{2}$.
Wobei zwei benachbarte Maxima bzw. zwei benachbarte Minima stets den Abstand λ besitzen.

Unterschiede zwischen einer fortschreitenden und einer stehenden Welle

Fortschreitende Welle	Stehende Welle
• Bewegtes Wellenbild welches sich räumlich mit der Phasengeschwindigkeit c ausbreitet	• Ortsfestes Wellenbild mit Knoten und Bäuchen
• Überall die gleiche Ampltitude	• Amplituden sind ortsabhängig und wiederholen sich in $\frac{\lambda}{2}$ - Abständen
• Transportiert Energie mit der Phasengeschwindigkeit c	• speichert lokal Energie
	• Alle Teilchen schwingen zum selben Zeitpunkt durch die Nulllage

Stehende Wellen entstehen allerdings nicht nur durch Reflexion einer Welle an einem losen oder festen Ende, sondern auch durch zwei Erreger, welche je eine Welle in Richtung des anderen Erregers aussenden. Je nach Abstand und Phasenlage der ausgesannten Welle erhält man durch das Superpositionsprinzip die übelagerte Welle.

Aufgaben

9. Zwei punktförmige Erreger E_1 und E_2 haben einen Abstand von $d = 9\,\text{cm}$. Beiden beginnen zeitgleich in der Bewegung nach oben und schwingen gleichphasig mit der Periodendauer $T = 1{,}0\,\text{s}$. Dabei breitet sich eine Welle mit der Wellenlänge $\lambda = 6{,}0\,\text{cm}$ in beide Richtungen aus. Zeichnen Sie für $t_1 = \frac{1}{2}T$, $t_2 = T$, $t_3 = \frac{3}{2}T$, $t_4 = 2T$ und $t_5 = 3T$ das Wellenbild der beiden Erreger (Primärwelle) und zeichnen Sie auch das Wellenbild der überlagerten Welle (Sekundärwelle), welches sich aus dem Super-Positions-Prinzip ergibt in ihre Zeichnung ein.

10.1 Erläutern Sie die wesentlichen Merkmale einer stehenden Welle.

10.2 Beschreiben und erläutern Sie ein Experiment, bei dem stehende Wellen auftreten.

11.0 Eine Seilwelle breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit $c = 5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ aus. Das Seil ist super elastisch (bzw. die Amplitude so klein, dass sich das Seil durch die Schwingungsbäuche kaum verlängert). Links befindet sich der Erreger, der mit $1{,}25\,\text{Hz}$ und einer Amplitude von $10\,\text{cm}$ die Seilwelle erzeugt. Rechts ist das Seil in $7{,}5\,\text{m}$ Entfernung vom Erreger an der Wand fixiert. Die erste Auslenkung erfolgt zum Zeitpunkt $t = 0\,\text{s}$ so, dass sich das Seil am Ort des Erregers nach oben bewegt.

11.1 Zeichnen Sie (maßstabsgetreu) das Wellenbild für den Zeitpunkt $t = 1,0\,s$.

11.2 Zeichnen Sie (maßstabsgetreu) das Wellenbild für den Zeitpunkt $t = 2,8\,s$ schrittweise:
a) zuerst die reflektierte Primärwelle b) darunter die sichtbare Sekundärwelle

12.0 Auf einem unbegrenzten, linearen Wellenträger werden durch die beiden Erreger E_1 und E_2 Querwellen mit der Amplitude $A = 1,0\,cm$ erzeugt, die sich mit der Geschwindigkeit $10\,\frac{cm}{s}$ ausbreiten. Die beiden Erreger schwingen sinusförmig mit $2,5\,Hz$.
Der Abstand von E_1 und E_2 beträgt $12\,cm$.
Zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,s$ bewegen sich beide mit maximaler Geschwindigkeit nach oben.

12.1 Zeichnen Sie für $t_1 = 1,9\,s$ und $t_2 = 2,0\,s$ die Momentanbilder der Welle im Bereich zwischen E_1 und E_2 und außerhalb der Strecke $[E_1E_2]$.

12.2 Geben Sie für beide Zeitpunkte die maximale Auslenkung der Welle genau in der Mitte zwischen den beiden Erregern an.

12.3 Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit und die maximale Beschleunigung des Wellenteilchens an dieser Stelle.

11.8 Stehende Wellen

Durch das Zustande kommen stehender Wellen wird den Musikinstrumenten erst ihr Klang zuteil.

Mithilfe von Musikinstrumenten lässt sich in unterschiedlicher Art und Weise Schall erzeugen. So schwingen z. B. bei Violinen oder Gitarren Saiten, bei Blasinstrumenten Luftsäulen, bei einer Pauke eine Membran. Charakteristisch ist für jedes Instrument eine bestimmte Klangfarbe, die eng mit den unterschiedlichen Schwingungsformen zusammenhängt.
Wenn man Musik machen will, muss man Tonleitern und musikalische Intervalle kennen. Einfache Untersuchungen kann man an selbst gebauten Instrumenten durchführen.

Mithilfe von **Musikinstrumenten** lässt sich in unterschiedlicher Art und Weise **Schall** erzeugen:

- Bei Zupf- und Streichinstrumenten wie Gitarre, Klavier oder Violine werden durch Zupfen, Anschlagen oder Streichen Saiten in Schwingungen versetzt.
- Bei Blasinstrumenten wie Trompete, Saxofon, Flöte oder Orgel schwingen Luftsäulen.
- Bei Schlaginstrumenten wie Pauken oder Trommeln werden Membranen in Schwingungen versetzt.

Als Beispiele betrachten wir die Schallerzeugung einiger spezieller Instrumente.
Die *Violine* ist, ähnlich wie eine *Gitarre*, eine *Bratsche* oder ein *Kontrabass*, ein Saiteninstrument. Die Saiten werden mit einem Bogen gestrichen und so in Schwingungen versetzt. Die schwingende Saite allein würde aber nicht den akustischen Eindruck hervorrufen, der für eine Violine charakteristisch ist. Entscheidend ist vielmehr, dass die Schwingungen über einen Steg auf den hölzernen Klangkörper übertragen werden. Damit wird sowohl der Klangkörper als auch die eingeschlossene Luft zum Mitschwingen angeregt. Der Klangkörper mit der eingeschlossenen Luft wirkt ähnlich wie ein Resonanzkasten bei einer Stimmgabel: Der

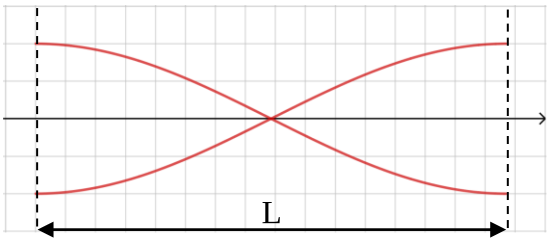
Schall wird mit größerer Lautstärke abgestrahlt. Diese Abstrahlung erfolgt sowohl durch den Klangkörper als auch von der Luft durch die Schalllöcher hindurch. Dabei werden verschiedene Töne unterschiedlich verstärkt, weil die Eigenfrequenz von Klangkörper und eingeschlossener Luft und die Erregerfrequenz durch die Saiten unterschiedlich sind.
Bei einer *Trompete* (ähnlich bei *Posaune*, *Tuba* und *Horn*) schwingen Luftsäulen unterschiedlicher Länge im Instrument. Die Anregung der Luftsäulen zum Schwingen erfolgt in folgender Weise: Durch die vibrierenden Lippen am Mundstück wird periodisch und sehr schnell die Luftzufuhr unterbrochen, wodurch die Luftsäule im Instrument zu Schwingungen angeregt wird. Das gelingt nur mit guter Lippenspannung und Wangenmuskulatur, was trainiert werden muss. Die Tonhöhe hängt von der Lippenspannung und von der Länge der Luftsäule ab. Letztere kann durch Betätigung von Ventilen oder durch Verschieben des Auszugs (Posaune) verändert werden.
Bei *Saxofon*, *Klarinette*, *Oboe* oder *Fagott* wird durch die ausgeblasene Luft ein elastisches Blättchen in Schwingungen versetzt und dadurch die Luftsäule im Instrument zu Eigenschwingungen angeregt. Die Tonhöhe hängt von der Art des Anblasens und von der Länge der Luftsäule ab. Letztere kann durch Öffnen oder Schließen von Löchern verändert werden.

Wenn man mit verschiedenen Instrumenten einen bestimmten Ton spielt, dann klingt er bei einer Gitarre anders als bei einer Violine und dort wieder anders als bei einem Klavier, obwohl in allen drei Fällen Saiten schwingen. Den speziellen akustischen Eindruck, den ein Musikinstrument bei uns hervorruft, bezeichnet man als die Klangfarbe des Instruments. Die Klangfarbe eines Instruments wird vor allem dadurch bestimmt, welche zusätzlichen Schwingungen zu den Grundschwingungen noch hinzukommen. Die Grundschwingung ist diejenige Schwingung einer Saite mit der größten Amplitude. Sie bestimmt die Tonhöhe. Die zusätzlich hinzukommenden Schwingungen, die man auch Oberschwingungen oder **Obertöne** nennt, überlagern sich mit der Grundschwingung. Durch diese Überlagerung von Grundschwingung und Oberschwingungen kommt für jedes Instrument ein ganz **charakteristisches Schwingungsbild** zustande. Wir empfinden diese unterschiedlichen Schwingungsbilder als verschiedene Klangfarben bei ein und derselben Tonhöhe.
Die Anzahl und die Intensität der Oberschwingungen ist bei den verschiedenen Instrumenten sehr unterschiedlich. Durch diese unterschiedlichen Obertöne kann selbst bei gleichartigen Instrumenten die Klangfarbe unterschiedlich sein. Sie wird zusätzlich beeinflusst durch die Größe und Form des Resonanzkörpers sowie durch das Material bis hin zum Lack.
(Quelle: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik/artikel/schall-und-musik)

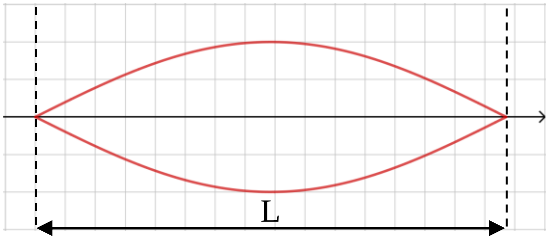
Grundschwingungen und Oberschwingungen sind stehende Wellen, die sich nur dann ausbilden, wenn die Länge L des Wellenträgers genau ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ ist.

In den folgenden 3 Fällen kann sich in der Musik eine stehende Welle bilden.

1. Fall: Zwei lose Enden

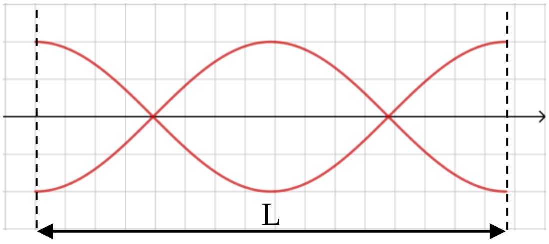


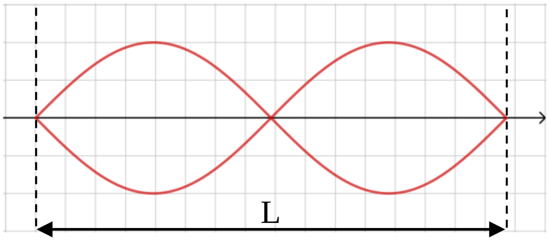
2. Fall: Zwei feste Enden



Bei der Grundschwingung befindet sich zwischen den Enden eine halbe Wellenlänge. Es gilt:

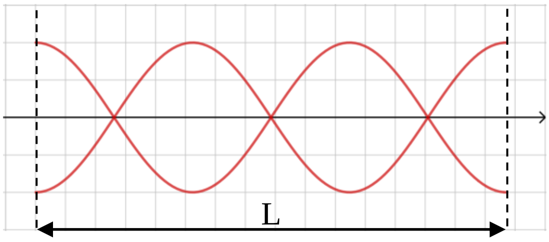
$$L = \frac{\lambda_0}{2}$$

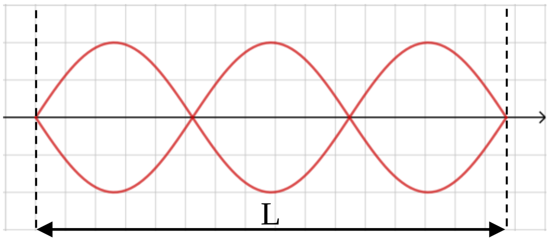




Bei der 1. Oberschwingung befindet sich zwischen den Enden eine halbe Wellenlänge mehr als bei der Grundschwingung. Es gilt:

$$L = \lambda_1$$





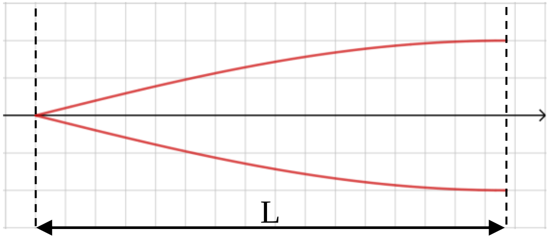
Bei der 2. Oberschwingung befindet sich zwischen den Enden eine halbe Wellenlänge mehr als bei der 1. Oberschwingung. Es gilt:

$$L = \frac{3}{2} \cdot \lambda_2$$

Allgemein gilt für die n. Oberschwingung: $L = \frac{n+1}{2} \cdot \lambda_n \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2 \cdot L}{n+1}$

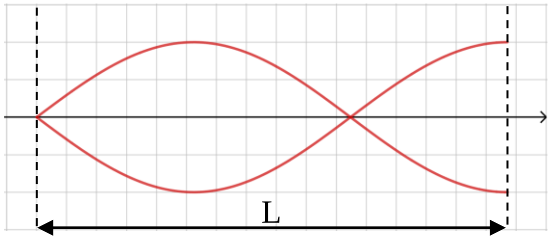
Mit $c = \lambda_n \cdot f_n$ folgt dann: $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{\frac{2 \cdot L}{n+1}} = (n+1) \cdot \frac{c}{2L}$

3. Fall: Ein loses und ein festes Ende



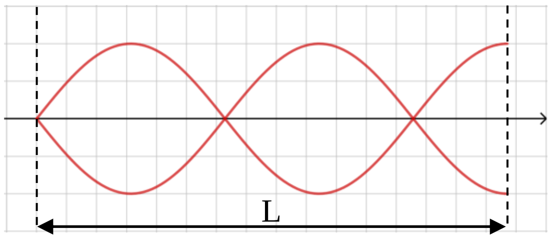
Bei der Grundschwingung befindet sich zwischen den Enden eine viertelte Wellenlänge. Es gilt:

$$L = \frac{\lambda_0}{4}$$



Bei der 1. Oberschwingung befindet sich zwischen den Enden eine halbe Wellenlänge mehr als bei der Grundschwingung. Es gilt:

$$L = \frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_1}{2} = \frac{3\lambda_1}{4}$$



Bei der 2. Oberschwingung befindet sich zwischen den Enden eine halbe Wellenlänge mehr als bei der 1. Oberschwingung. Es gilt:

$$L = \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = \frac{5\lambda_2}{4}$$

Allgemein gilt für die n. Oberschwingung: $L = \frac{2n+1}{4} \cdot \lambda_n \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{4 \cdot L}{2n+1}$

Mit $c = \lambda_n \cdot f_n$ folgt dann: $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{\frac{4 \cdot L}{2n+1}} = (2n+1) \cdot \frac{c}{4L}$

Somit gilt für die Frequenz der n.-ten Oberschwingung: $f_n = (2n+1) \cdot \frac{c}{4L}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Dabei ist

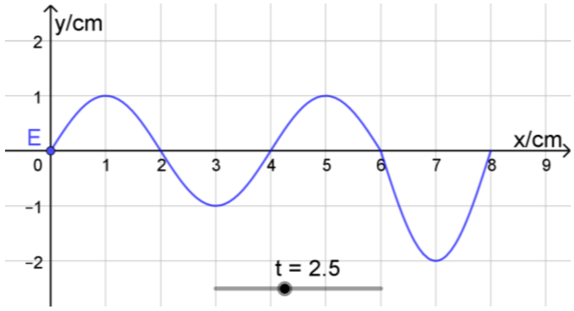
$n = 0$ Grundschwingung oder 1. Harmonische
$n = 1$ 1. Oberschwingung oder 2. Harmonische
$n = 2$ 2. Oberschwingung oder 3. Harmonische
$n = 3$ 3. Oberschwingung oder 4. Harmonische
usw.

Bildet sich bei einer bestimmten Freuquenz eine stehende Welle aus, so nennt man diese auch Resonanfrequenz.

http://www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ph/14/ep/einfuehrung/wellen/interferenz.vlu/Page/vsc/de/ph/14/ep/einfuehrung/wellen/stehendewellen.vscml.html

Aufgaben

13.0 Auf einer superelastischen, sehr dünnen Gummimembran breitet sich eine Welle kreisförmig aus. Der Wellenerreger befindet sich bei $x = 0\,\text{cm}$ und beginnt zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ mit der Frequenz $f = 1{,}0\,\text{Hz}$ zu schwingen.
Die Abbildung zeigt das Momentanbild der Welle zum Zeitpunkt $t_1 = 2{,}5\,\text{s}$.



13.1 Begründen Sie, ob am Ort $x = 8{,}0\,\text{cm}$ ein loses oder festes Ende (für die Elongation) ist.

13.2 Geben Sie die Wellengleichung des Erregers $y_E(t,x)$ mit eingesetzten Zahlen an.

13.3 Die sich ausbreitende, stehende Welle lässt sich mit der Gleichung

$$y_{ges}(t,x) = -2A \cdot \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

beschreiben. Berechnen Sie die Lage der Schwingungsknoten und der Schwingungsbäuche in allgemeiner Form.

13.4 Zeichnen Sie die Momentanbilder der Welle zum Zeitpunkt $t_2 = 3{,}5\,\text{s}$ und $t_3 = 4{,}0\,\text{s}$.

13.5.0 Am Ort $x = 8{,}0\,\text{cm}$ ist nun ein <u>loses Ende</u> (z.B. durch einen Schnitt in der Membran).

13.5.1 Zeichnen Sie ein Momentanbild von $y_{ges}(x)$ für den Zeitpunkt $t_2 = 3{,}0\,\text{s}$ im Maßstab 1:1.

13.5.2 Bestimmen Sie die ersten 3 Eigenfrequenzen der Anordnung, wenn das linke Ende auch lose ist.

14.0 Eine Welle bewegt sich mit der Amplitude A und der Frequenz f nach rechts und überlagert sich mit einer zweiten Welle gleicher Amplitude und gleicher Frequenz.
Die Elongation beider Wellen ist zu einem bestimmten Zeitpunkt für beide Wellen maximal.
Der Abstand der Erreger ist ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge.

14.1 Leiten Sie die Gleichung der stehenden Welle in allgemeiner Form her.

Formelsammlung: $\sin\alpha + \sin ß = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + ß}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - ß}{2}\right)$

14.2 Zeichnen Sie die Momentanbilder der Wellen $(A = 2{,}0\,\text{cm})$ zwischen den beiden Erreger, die einen Abstand von $\lambda = 10\,\text{cm}$ voneinander haben, für die Zeitpunkte $t = \frac{1}{2}T$, $t = T$ und $t = \frac{5}{4}T$.

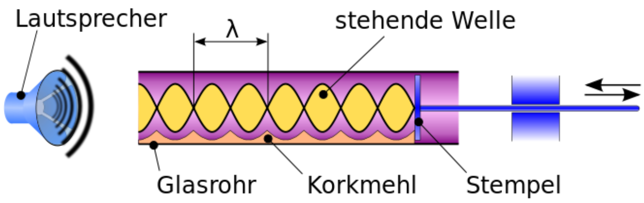
11.9 Kundtsches Rohr

Stehende Wellen geben bei fast allen Musikinstrumenten (insbesondere bei allen Arten von Flöten und Pfeifen) den Ton an. Diese stehenden Wellen kann man z. Bsp. in einem Kundtschen Rohr sehr gut sichtbar machen.

An dem einen (loses) Ende des Glasrohrs befindet sich ein Lautsprecher (erzeugt die Schallwelle) und am anderen (festen) Ende befindet sich ein Stempel mit dem die Länge L zwischen Erreger und dem festen Ende des Rohres verändert werden kann.

Erzeugt nun der Lautsprecher einen Ton der Frequenz f $\left(c_{Schall} = \lambda \cdot f\right)$, so muss durch Bewegen des Stempel die Länge L so eingestellt werden, dass sich im Rohr eine stehende Welle bildet.

Korkmehl, welches sich im Rohr befindet wird durch die Schallwellen bewegt und sammelt sich an den Stellen, bei denen die Schallschnelle der Schallwellen am kleinsten ist, d.h. in den Knoten der stehenden Welle, an und es bilden sich kleine Mehlhäufchen aus. Zwischen diesen Mehlhäufchen befinden sich folglich die Schwingungsbäuche der stehenden Welle



Kundtsches Rohr (Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Kundt%27s_tube_DE.svg)

Da das offene Ende mitschwingt und auch die reflektierte Schallwelle im Gleichtakt mit der Membran des Lautsprechers mitschwingt, hat die Schnelle dort einen Wellenbauch, d.h. maximale Auslenkung.
Da das geschlossene Ende nicht mitschwingt, muss sich am Stempel dagegen ein Knoten der Schallwelle befinden.

Zwischen der Wellenlänge λ und der Länge L des Rohres gilt folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\lambda}{4} + n \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad | \cdot 4 \\ 4L &= \lambda + 2n \cdot \lambda \\ 4L &= \lambda \cdot (2n+1) \\ \lambda &= \frac{4L}{2n+1} \end{aligned}$$

Mit $f = \frac{c}{\lambda}$ folgt:

$$f = \frac{c}{\frac{4L}{2n+1}} = (2n+1) \cdot \frac{c}{4L} \quad \Rightarrow \quad f_n = (2n+1) \cdot \frac{c}{4L}$$

Dabei erhält man für n die Frequenz f_n der:

$n = 0$ Grundschwingung oder 1. Harmonische
$n = 1$ 1. Oberschwingung oder 2. Harmonische
$n = 2$ 2. Oberschwingung oder 3. Harmonische
$n = 3$ 3. Oberschwingung oder 4. Harmonische
usw.

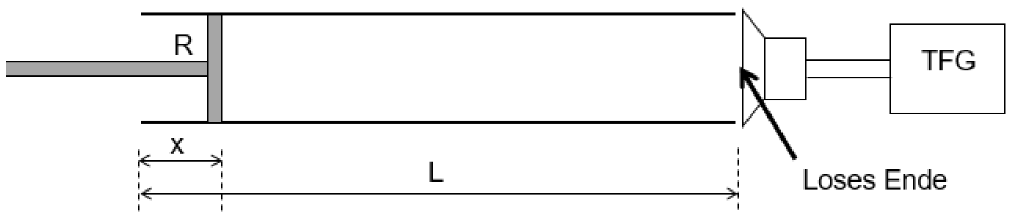
Bemerkung: n ist dabei die Anzahl der Knoten innerhalb der Kundtschen Röhre; den Knoten am festen Ende nicht mitgezählt.

Video 1 Kundtsche Röhre

Video 2 Kundtsche Röhre

Aufgabe

15.0 Mit Hilfe einer Kundt'schen Röhre kann man stehende Wellen erzeugen und deren Wellenlänge messen. Die Anregung erfolgt über einen Tonfrequenzgenerator TFG $(f = 1{,}80\,\mathrm{kHz})$ mit Hilfe eines Lautsprechers. Das darin befindliche Korkmehl häuft sich an den Stellen, an denen die Luftgeschwindigkeit Null beträgt.



Dabei erhält man für den Abstand zweier benachbarter durch Korkmehl sichtbar gemachter Bewegungsknoten den Wert 9,50 cm. Die Gesamtlänge L des Rohres beträgt $L = 90\,\mathrm{cm}$.

15.1 Berechnen Sie aus den gegebenen Daten die Schallgeschwindigkeit in Luft.

15.2 Welchen Abstand x vom linken Rand der Röhre (siehe Skizze) muss der Reflektor R mindestens haben, damit bei der gewählten Frequenz eine stehende Welle zustande kommt? Begründung!

15.3 Berechnen Sie die Frequenz der Grundschwingung der Röhre, wenn man für x den Wert 52,0 cm wählt und die Schallgeschwindigkeit den Wert 342 $\mathrm{ms^{-1}}$ besitzt.

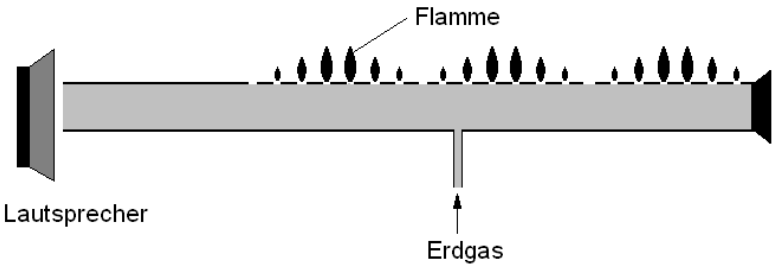
11.10 Rubenssches Flammenrohr

Das Rubenssche Flammenrohr besteht aus einem Rohr, das an seiner Oberseite mit vielen kleinen Löchern gleichen Durchmessers versehen ist. Das eine Rohrende ist mit einer dünnen Membran M, das andere mit einem verschiebbaren Kolben K verschlossen. Durch die Einlassöffnung E wird brennbares Gas, z. B. Propangas, in das Rohrinnere geleitet, welches durch die Löcher auf der Oberseite ausströmt und dort entzündet werden kann.

Ohne Schalleinwirkung auf das Rohr sieht man zunächst eine Reihe gleich großer Flammen. Bringt man nun die Membran durch eine Schallquelle zum Schwingen, so kann man durch geeignetes Verschieben des Kolbens erreichen, dass sich im Rohrinneren eine stehende Schallwelle ausbildet (alternativ kann bei festen Rohrlängen auch die Tonfrequenz variiert werden).

Die Form der stehenden Schallwelle ist aus der Höhe der einzelnen Gasflämmchen erkennbar:

An den Stellen, an denen die Flammen am höchsten brennen müssen sich Druckmaxima oder Druckminima befinden. Da strömt nämlich am meisten Gas aus.
An den Stellen, an denen die Flammen am kleinsten sind Druckknoten (hier gibt es keinen Wechseldruck, die Gasteilchen bewegen sich kaum!).



Rubenssches Flammenrohr (Quelle: https://www.leifiphysik.de)

[Video 1 Grundlegender Versuch]

[Video 2 Musikalisches Rohr]

[Video 3 Noch ein Musikalische Rohr]

[Video 4 2D-Rohr]

Aufgabe

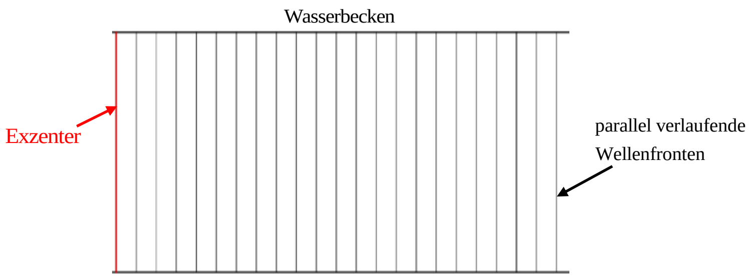
16.0 In ein einseitig geschlossenes Rohr wird Erdgas eingeleitet, welches an den vielen Löchern abbrennen kann (Rubensrohr). Bei ganz bestimmten Frequenzen des Lautsprechers brennen die Flammen mit räumlich periodisch wiederkehrender Flammenhöhe (siehe Abbildung).

16.1 Erklären Sie das Zustandekommen der Erscheinung.

16.2 Bestimmen Sie die Schallgeschwindigkeit in Erdgas, wenn die Entfernung zwischen zwei benachbarten Flammentälern $12\,\text{cm}$ und die vom Lautsprecher abgestrahlte Frequenz $f = 1{,}9\,\text{kHz}$ betragen!

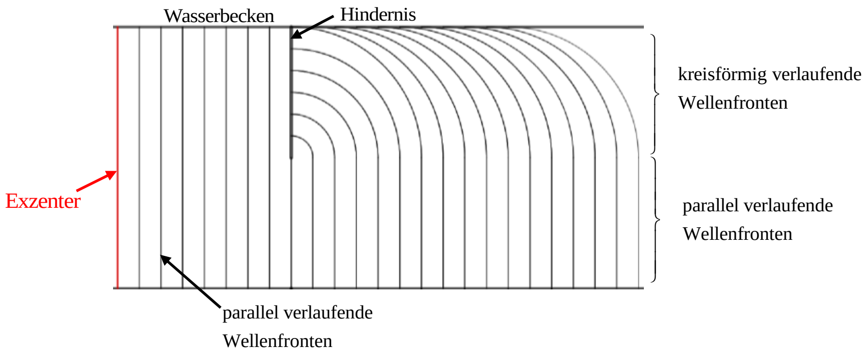
11.11 Beugung

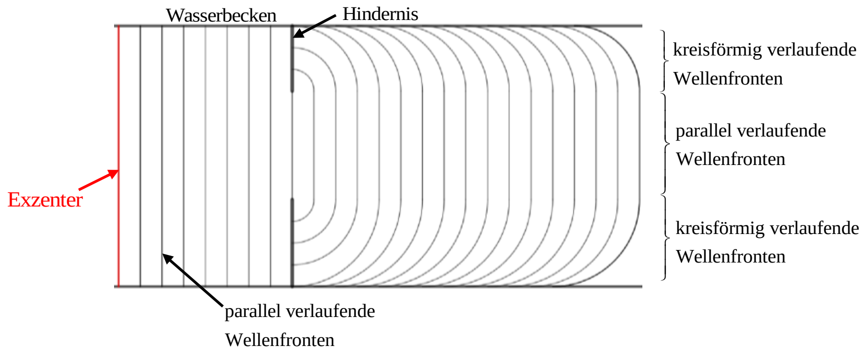
In einem ebenen Wasserbecken wird durch einen Exzenter eine Ebene Welle erzeugt. Die Wellenfronten breiten sich in dem Wasserbecken ungehindert aus, die Wellenfronten verlaufen parallel.

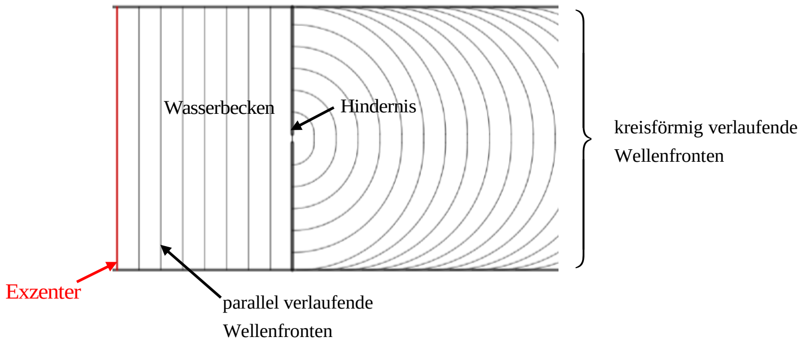


[Video Wasserwellen Beugung]

Bringt man nun ein Hindernis in das Wasserbecken ein, so breiten sich die Wellen dahinter nicht mehr in allen Bereichen geradlinig aus.







Trifft eine Welle auf ein Hindernis, so entsteht dahinter kein Wellenschatten (also keine Auslöschung der Welle). Die am Hindernis vorbeilaufende Welle bildet am Rand eine kreisförmige Welle, die sich in dem Raum hinter dem Hindernis ausbreitet. Diesen Effekt nennt man Beugung.

Unter **Beugung** versteht man die bei einer Wellenbewegung auftretende Abweichung von der ursprünglichen Richtung der Wellennormalen (Wellenausbreitungsrichtung), die nicht durch Brechung, Reflexion oder Streuung hervorgerufen wird, sondern durch im Weg stehende Hindernisse (z.B. Beugungsspalt, Blende, Kante usw.) oder Dichteänderungen des Mediums (z.B. Erdatmosphäre). Durch Beugung gelangt auch in ursprünglich von der Strahlung abgeschirmte Gebiete Energie.
Beugung tritt bei jeder Art von Wellen auf (Materiewellen, elektromagnetische Wellen, Schallwellen usw.). Die Abweichung vom geometrischen Strahlenverlauf wird bemerkbar, wenn die Dimension der Hindernisse oder der Öffnung in der Größenordnung der Wellenlänge liegt oder kleiner als diese ist. Insofern spielt die Beugung in der Akustik, wo die Länge der Schallwellen in der Größenordnung von Metern liegt, eine wichtige Rolle, da sie ein Hören hinter Hindernissen überhaupt erst ermöglicht.

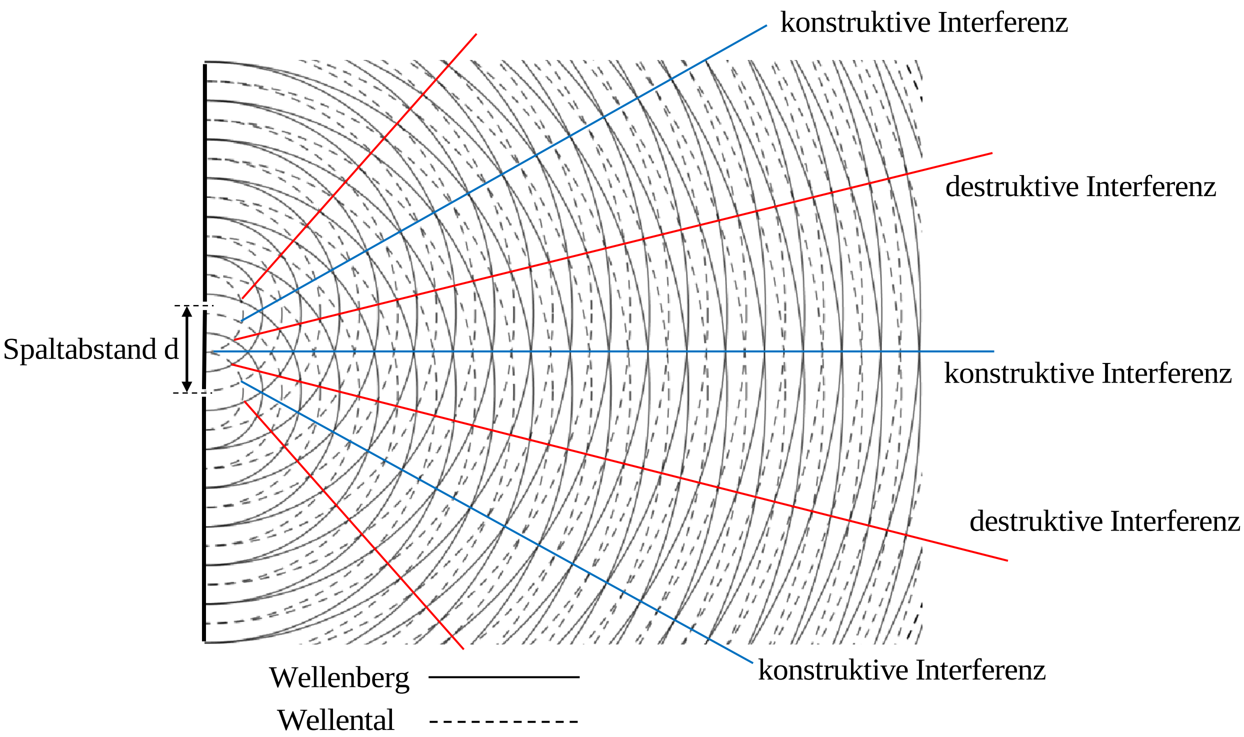
Video Beugung an verschiedenen Hindernissen
Video Wasserwellen zweier punktförmiger Erreger

11.12 Interferenz am Doppelspalt

Wir haben gesehen, dass sich eine Wellenfront nach passieren eines schmalen Spalts kreisförmig ausbreitet.
Nun wollen wir untersuchen, welches Wellenbild sich ergibt, wenn das Hindernis zwei Spalte mit sehr kleinem Spaltabstand d besitzt.

Video 1 Doppelspalt (ab 0:50)
Video 2 Doppelspalt

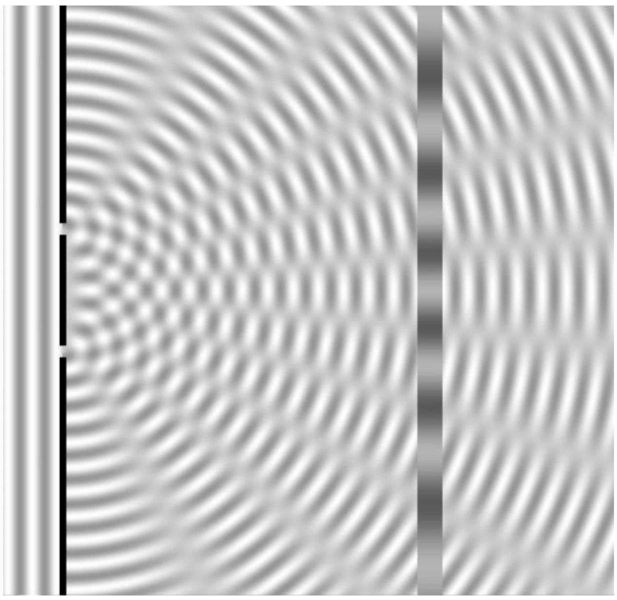
Eine Momentaufnahme des Wellenbilds für den Doppelspaltversuch ist in folgender Abbildung dargestellt:



Das Wellenbild ergibt sich durch Überlagerung der von den beiden Spalten ausgehenden Kreiswellenfronten (→ Interferenz).
Treffen dabei zwei Wellenberge oder zwei Wellentäler aufeinander, so kommt es zu einer **konstruktiven Interferenz**. Die Amplitude an diesem Ort ist doppelt so groß wie die Amplitude der einzelnen Welle.
Treffen ein Wellenberg und ein Wellental aufeinander, so kommt es zu einer **destruktiven Interferenz**. Die Gesamtamplitude hat hier den Wert Null.

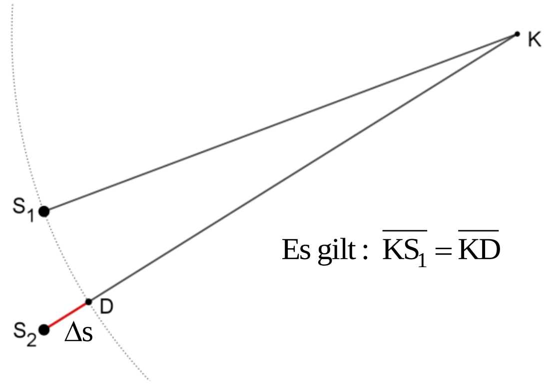
Interferenz durch Beugung am Doppelspalt
Geogebra 1

Betrachtet man obiges Wellenbild, so stellt man fest, dass es Linien gibt entlang welcher konstruktive Interferenz auftritt. Ebenso gibt es Linien entlang welcher destruktive Interferenz auftritt.



Quelle: https://quantenquark.com/hoerbuch/

Aber unter welcher Bedingung tritt nun konstruktive bzw. destruktive Interferenz auf? Konstruktive Interferenz tritt immer dann auf, wenn ein Wellenberg von Spalt S_2 mit einem Wellenberg einer nachfolgenden Welle von Spalt S_1 zusammentrifft. D.h., dass der Wellenberg von Spalt S_2 bereits einen längeren Weg zurückgelegt hat als der Wellenberg von Spalt S_1. Diesen Weg nennt man Gangunterschied Δs. Dieser ist, je nach Linie auf welcher konstruktive Interferenz auftritt, immer ein Vielfaches der Wellenlänge λ.



Für den Gangunterschied bei konstruktiver Interferenz gilt:

$$\Delta s = k \cdot \lambda \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0$$

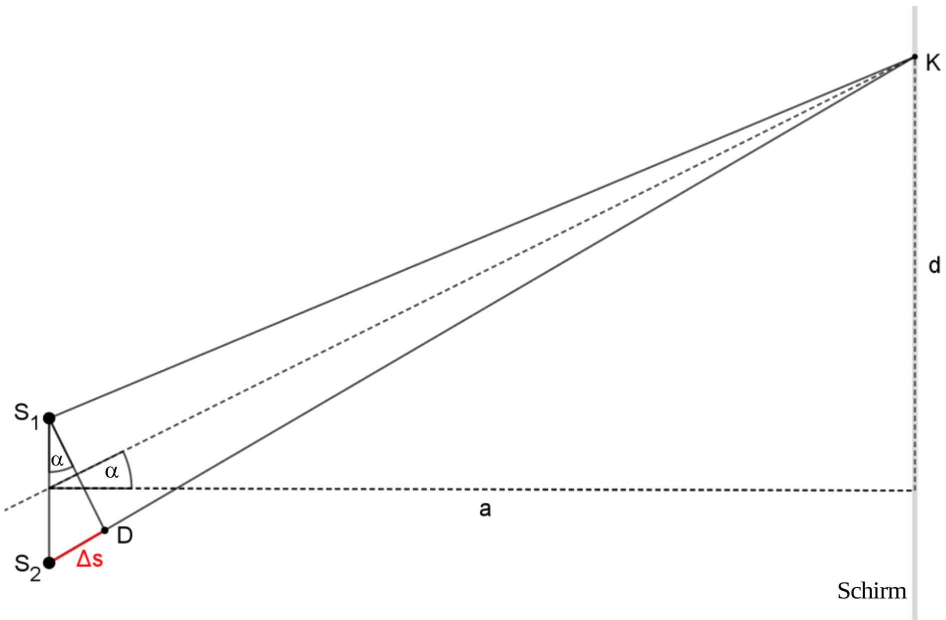
Dabei gibt k die Ordnung der konstruktiven Interferenz an. In obigem Bild ist die waagrechte blaue Linie das Maximum 0. Ordnung und die schräg nach oben (sowie schräg nach unten) laufende blaue Linie ist das Maximum 1. Ordnung.

Analog kann man nun folgern, dass für den Gangunterschied bei destruktiver Interferenz gilt:

$$\Delta s = \left(k - \tfrac{1}{2}\right) \cdot \lambda \text{ mit } k \in \mathbb{N}$$

Die schräg nach oben/unten laufenden roten Linien in obiger Zeichnung sind dann die Minima 1. bzw. 2. Ordnung. Ein Minimum 0. Ordnung gibt es nicht!!

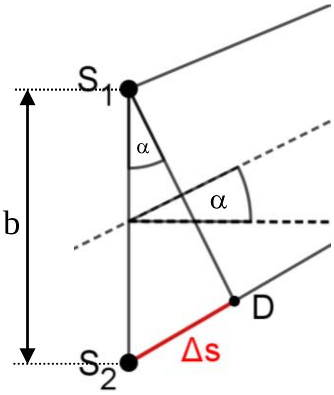
Um nun den Winkel α zu erhalten der zwischen dem Maximum 0. Ordnung und dem Maximum 1. Ordnung eingeschlossen wird geht man folgendermaßen vor. Man bringt in einer Entfernung a zunächst einen Schirm oder Empfänger an, mit welchem sich ein Maximum registrieren lässt. Das Maximum 1. Ordnung habe dann am Schirm eine Auslenkung nach oben um die Strecke d.



Für den Winkel α gilt dann:

$$\tan(\alpha) = \frac{d}{a}$$

Betrachtet man nun noch das Dreieck S_1S_2D, so kommt der Winkel α nochmal bei S_1 vor und das Dreieck ist sogar (nahezu) rechtwinklig bei D. Somit gilt:



$$\sin(\alpha) = \frac{\Delta s}{b}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{k \cdot \lambda}{b} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0$$

Damit lässt sich nun, bei bekannter Wellenlänge λ und Spaltabstand b, der Winkel α für verschiedene Werte von k ermitteln.
Über obige Formel würde man dann aber auch den Abstand d (Abstand des Maximums 0. und k. Ordnung auf dem Schirm) erhalten.

Für kleine Winkel α lässt sich noch folgern, dass gilt: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\underbrace{\cos(\alpha)}_{\approx 1}} \approx \sin(\alpha)$

Somit folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \tan(\alpha) = \frac{d}{a} \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{d}{a} \\ \sin(\alpha) = \frac{k \cdot \lambda}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{d}{a} = \frac{k \cdot \lambda}{b} \quad \Rightarrow \quad k \cdot \lambda = \frac{b \cdot d}{a}$$

Damit lässt sich z. B. wunderbar die Wellenlänge λ ermitteln.

[Noch ein Video dazu]

Für die maximale Anzahl von k (Ordnung der Maxima) gilt:

$$\sin(\alpha) < 1$$

$$\frac{k \cdot \lambda}{b} < 1$$

$$k \cdot \lambda < b$$

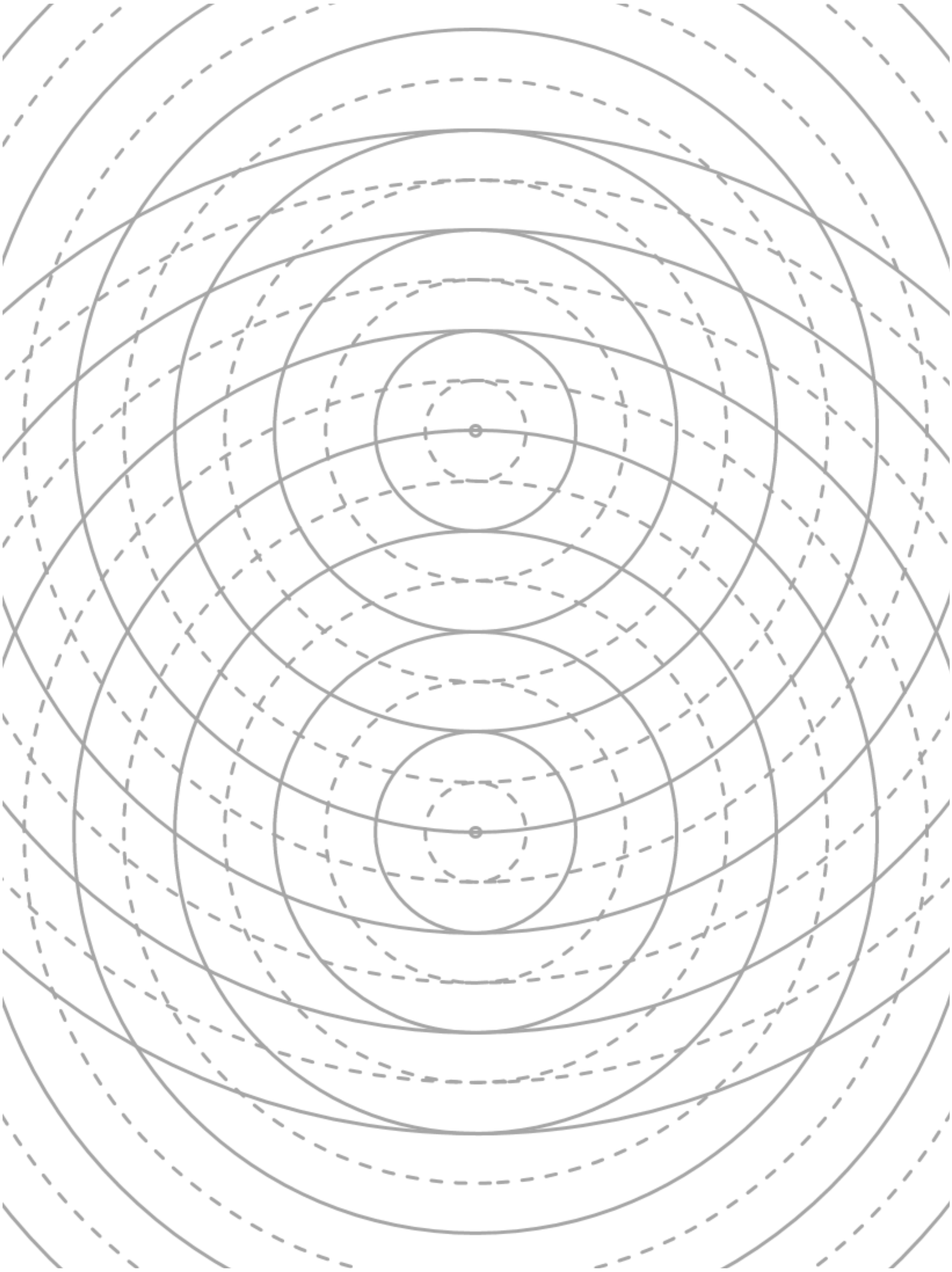
$$k < \frac{b}{\lambda}$$

Ist also die Spaltbreite z. B. $b = 3{,}5 \cdot \lambda$, so folgt: $k < \frac{3{,}5 \cdot \lambda}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad k < 3{,}5$

Somit kann k die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen. Es gibt also höchstens noch ein Maximum 3. Ordnung.
Da diese aber symmetrisch zum Maximum 0. Ordnung liegen muss es auf dem Schirm insgesamt 7 Maxima geben.

Aufgaben

17. Der Abstand b der punktförmigen Erreger beträgt 4 Wellenlängen λ.
Zu sehen ist ein Momentanbild nach der Zeit $t = 7 \cdot T$. Sie schwingen gleichphasig.
Tragen Sie die **Interferenzhyperbeln** ein und markieren Sie das **Hauptmaximum** (0. Ordnung), sowie die **Maxima** 1. - 4. Ordnung und **Minima** 1. - 4. Ordnung.

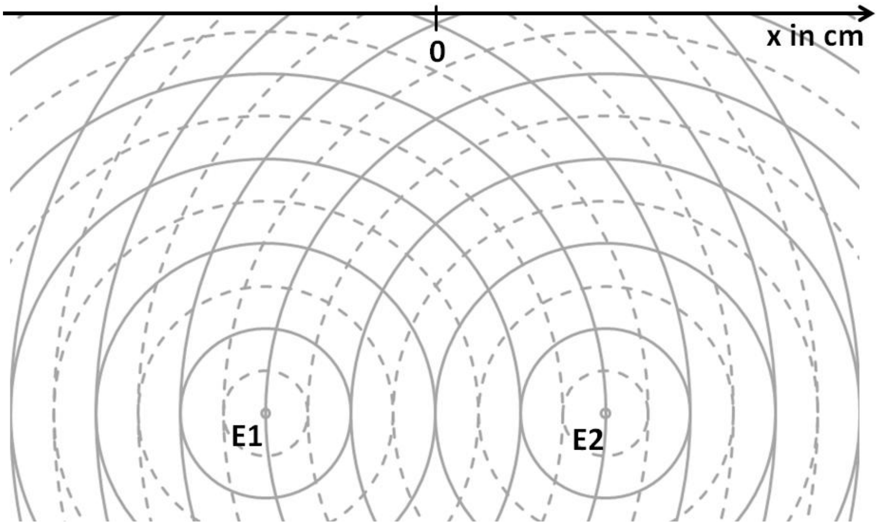


Wellenberg $(y = +A)$: durchgezogenen Linie

Wellental $(y = -A)$: gestrichelte Linie

18.0 Gegeben sind zwei punktförmige Erreger, die gleichphasig mit einer Frequenz von $f = 2,0\,\text{Hz}$ harmonisch schwingen einen Abstand von $b = 4,0\text{cm}$ voneinander haben. Die kreisförmigen Wellenfronten breiten sich mit einer Geschwindigkeit von $c = 2,0\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ aus.

18.1 Konstruieren Sie punktweise die Interferenzhyperbeln mit dem Gangunterschied $\Delta s = 2\lambda$.



Wellenberg $(y = +A)$: durchgezogenen Linie

Wellental $(y = -A)$: gestrichelte Linie

18.2 Geben Sie an, wie viele Punkte es gibt, die vom Erreger E1 die Entfernung $s_1 = 7,0\,\text{cm}$ und vom Erreger E2 die Entfernung $s_2 = 8,5\,\text{cm}$ besitzen. Zeigen Sie, dass an diesen Punkten ein Minima 2. Ordnung liegt.

18.3 Bei konstanter Frequenz f hängt die Ordnungszahl k der Maxima vom Abstand b der beiden Erreger ab. Leiten Sie eine Gleichung zur Ermittlung der höchsten Ordnungszahl k_{max} der auftretenden Maxima in Abhängigkeit von der Frequenz her. Berechnen Sie k_{max} für $f = 2,0\,\text{Hz}$.

18.4 Berechnen Sie, in welchem Bereich der Abstand g der Erreger liegen muss, damit man genau 7 Kurven der Maxima auf der x-Achse beobachtet.

18.5 Lösen Sie die Teilaufgabe 18.3, wenn man anstatt der Maxima nun Minima betrachtet!

19.0 In einer Wellenwanne werden von zwei punktförmigen, harmonisch schwingenden Erregern E_1 und E_2 mit dem Abstand $b = 9,6\,\text{cm}$, deren Frequenz mit Hilfe eines Motors stufenlos zwischen $2,0\,\text{Hz}$ und $10,0\,\text{Hz}$ eingestellt werden kann, Kreiswellen erzeugt. Diese breiten sich mit der Geschwindigkeit $c = 12,8\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ aus. Die Amplitude A_0 der von den Erregern ausgehenden Einzelwellen soll im gesamten Bereich der Wellenwanne $6,0\,\text{mm}$ betragen. Die Erreger E_1 und E_2 schwingen stets

gleichphasig. Von Reflexionen an den Rändern der Wellenwanne wird abgesehen.
Für einen Punkt P gilt: $\overline{E_1P} = 12{,}0\,\text{cm}$; $\overline{E_2P} = 8{,}0\,\text{cm}$

19.1 Berechnen Sie Frequenzen, bei denen das Teilchen im Punkt P aufgrund der Überlagerung der beiden Kreiswellensysteme mit maximaler Amplitude schwingt.

19.2 Berechnen Sie die Frequenzen, bei denen das Teilchen im Punkt P überhaupt nicht schwingt.

20.0 Auf einen Doppelspalt mit dem Spaltabstand $b = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$ fällt Licht mit der Wellenlänge λ.

20.1 Begründen Sie, warum rotes Licht $(\lambda_r = 750\,\text{nm})$ stärker abgelenkt wird als blaues Licht $(\lambda_b = 440\,\text{nm})$.

20.2 Für eine bestimmte Wellenlänge λ erscheint das Maximum 1. Ordnung gegenüber dem Maximum 0. Ordnung unter dem Winkel $\rho = 6{,}5°$. Berechnen Sie die Wellenlänge λ und die Anzahl der auftretenden Maxima für das verwendete Licht.