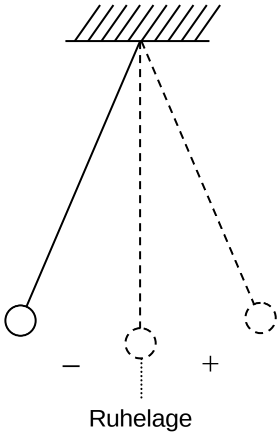
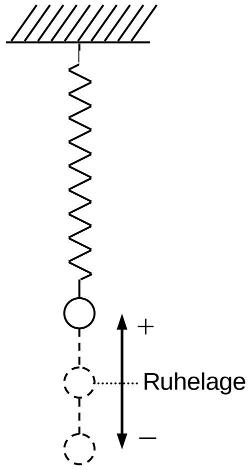
§ 10 Schwingungen

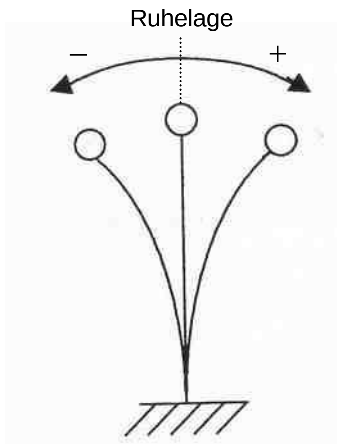
10.1 Beispiele und Grundlagen



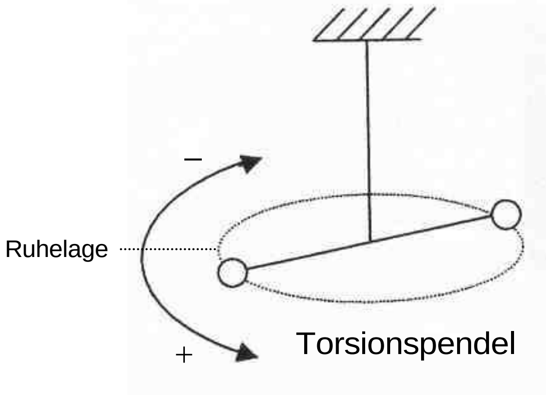
Fadenpendel



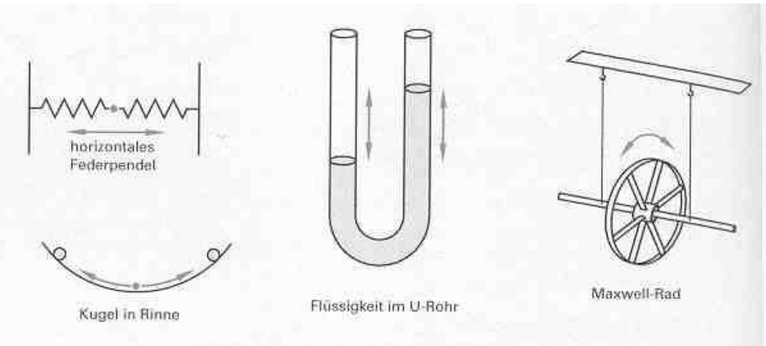
Federpendel



Federpendel



Torsionspendel



Charakteristika:

- Die Bewegung ist periodisch; d.h. die Bewegung wiederholt sich nach einer bestimmten Zeit immer wieder.
- Die Bewegung erfolgt symmetrisch zur Ruhelage des schwingenden Systems (Oszillator)

Definition: Die Bewegung eines Körpers, die sich in festen Zeitabständen wiederholt und symmetrisch zu einer Ruhelage abläuft heißt Schwingung.

Die jeweilige, momentane Auslenkung der schwingenden Masse gegenüber der Ruhelage (Nulllage) nennt man die Elongation $\left(s(t);\, y(t)\right)$.

Der Betrag der maximal auftretenden Elongation heißt Amplitude $\left(A;\, s_{max};\, y_{max}\right)$.

Bleibt die Amplitude während des gesamten Schwingungsvorgangs konstant, so liegt eine ungedämpfte Schwingung vor. Nimmt die Amplitude mit der Zeit ab, z. B. durch Reibung, so spricht man von einer gedämpften Schwingung.
Die Zeitspanne für einen Hin- und Hergang der Schwingung nennt man die Periodendauer T.
Für die Schwingungsfrequenz f gilt dann:

$$f = \frac{1}{T}$$

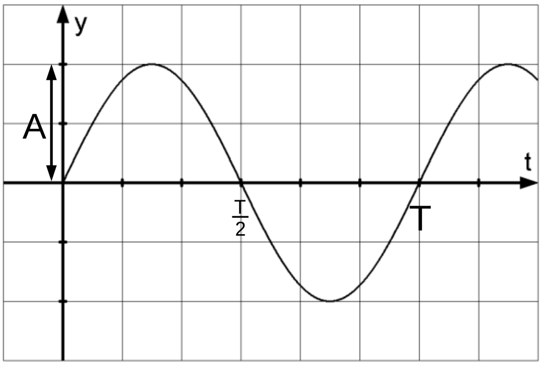
oder auch: $f = \frac{n}{t}$ $\left(n : \text{Anzahl der Schwingungsperioden; } t : \text{dafür benötigte Zeit} \right)$

Zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung einer Schwingung werden folgende Bedingungen eingeführt:

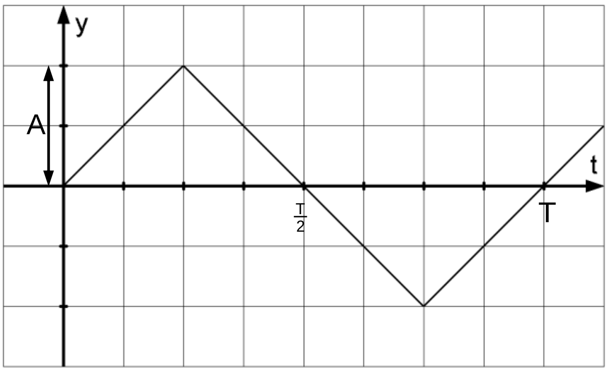
- es wird zunächst von Reibung abgesehen.
- Bewegung des schwingenden Körpers erfolge eindimensional; wird eindimensional projiziert.
- schwingende Massen werden als Massenpunkte betrachtet.

10.2 Zeit-Elongations-Diagramm für verschiedene Schwingungsformen

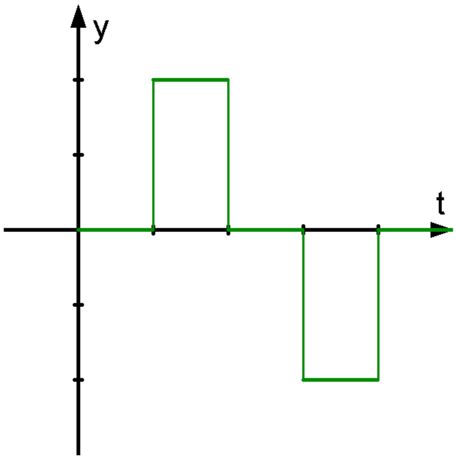
2.1 Sinusförmig (Federpendel)



2.2 Dreiecksförmig (Jo-Jo; Maxwell-Rad)



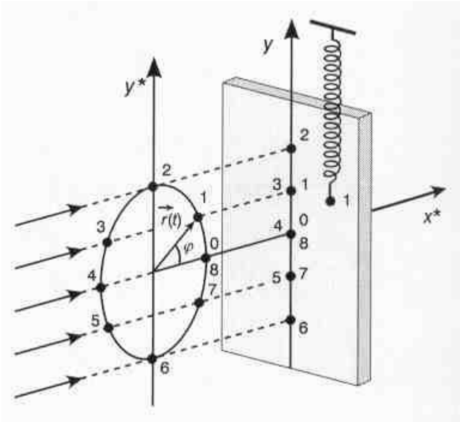
2.3 Rechteckförmig (Kipp-Schwingung)

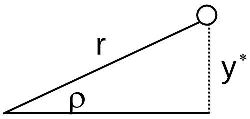


10.3 Die harmonische Schwingung

Eine Schwingung ist harmonisch, wenn zwischen ihr und einer Kreisbewegung ein geometrischer Zusammenhang besteht.

Eine Kugel, die mit konstanter Bahngeschwindigkeit einen Kreis umläuft wird mit parallelen Licht von der Seite her beleuchtet und der Schatten der Kugel auf einer senkrechten Ebene beobachtet. Parallel dazu lässt man den Pendelkörper eines Federpendels schwingen. Schwingen (die Schatten) beide Körper synchron, dann müssen sie die gleiche Zeit-Orts-Funktion haben. Diese erhält man folgendermaßen:
Die y^*-Koordinate der Kugel erhält man zunächst aus folgender geometrischen Überlegung:





$$\sin\rho = \frac{y^*}{r} \quad \Rightarrow \quad y^* = r \cdot \sin\rho$$

Bei der gleichmäßigen Kreisbewegung gilt:

$$\omega = \frac{\rho}{t} \quad \Rightarrow \quad \rho = \omega t$$

und somit folgt:

$$y^* = r \cdot \sin(\omega t)$$

Befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Masse nicht in der Ruhelage, so muss eine gewisse Phasenverschiebung ρ_0 berücksichtigt werden: also

$$y^* = r \cdot \sin(\omega t + \rho_0)$$

Da die Bewegung zu irgendeinem Zeitpunkt auch mal die maximale Auslenkung erreichen muss gilt:

$$y^*_{max} = A$$

also:

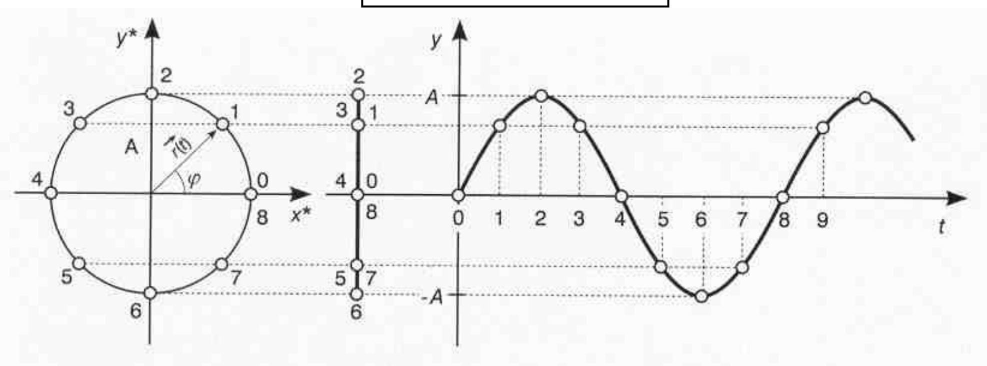
$$r = A$$

und somit:

$$y^* = A \cdot \sin(\omega t + \rho_0)$$

Die y^*-Koordinate der Kugel entspricht ja der y-Koordinate ihres Schattens und so folgt schließlich:

$$\boxed{y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \rho_0)} \qquad \text{Zeit-Orts-Funktion}$$



Mit Hilfe der Differenzialrechnung erhält man die Momentangeschwindigkeit

$$\cancel{v(t)=\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}} \quad \text{da } v(t)\neq \text{konst.}$$

$$v(t)=\frac{dy(t)}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{y(t+dt)-y(t)}{dt}=\dot{y}(t)=A\omega\cdot\cos(\omega t+\rho_0)$$

$$v(t)=\dot{y}(t)=A\omega\cdot\cos(\omega t+\rho_0)$$

dabei ist

$$\boxed{v_{max}=A\omega} \qquad \text{Betrag der Maximalgeschwindigkeit}$$

Entsprechend die Momentanbeschleunigung

$$\cancel{a(t)=\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}} \quad \text{da } a(t)\neq \text{konst.}$$

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{v(t+dt)-v(t)}{dt}=\dot{v}(t)=-A\omega^2\cdot\sin(\omega t+\rho_0)$$

$$a(t)=\dot{v}(t)=\ddot{y}(t)=-A\omega^2\cdot\sin(\omega t+\rho_0)$$

dabei ist

$$\boxed{a_{max}=A\omega^2} \qquad \text{Betrag der Maximalbeschleunigung}$$

Ferner gilt auch:

$$a(t)=-\omega^2\cdot y(t)$$

Durch Umformung erhält man schließlich

$$\dot{v}(t)=-\omega^2\cdot y(t)$$

die Differenzialgleichung der harmonischen Schwingung

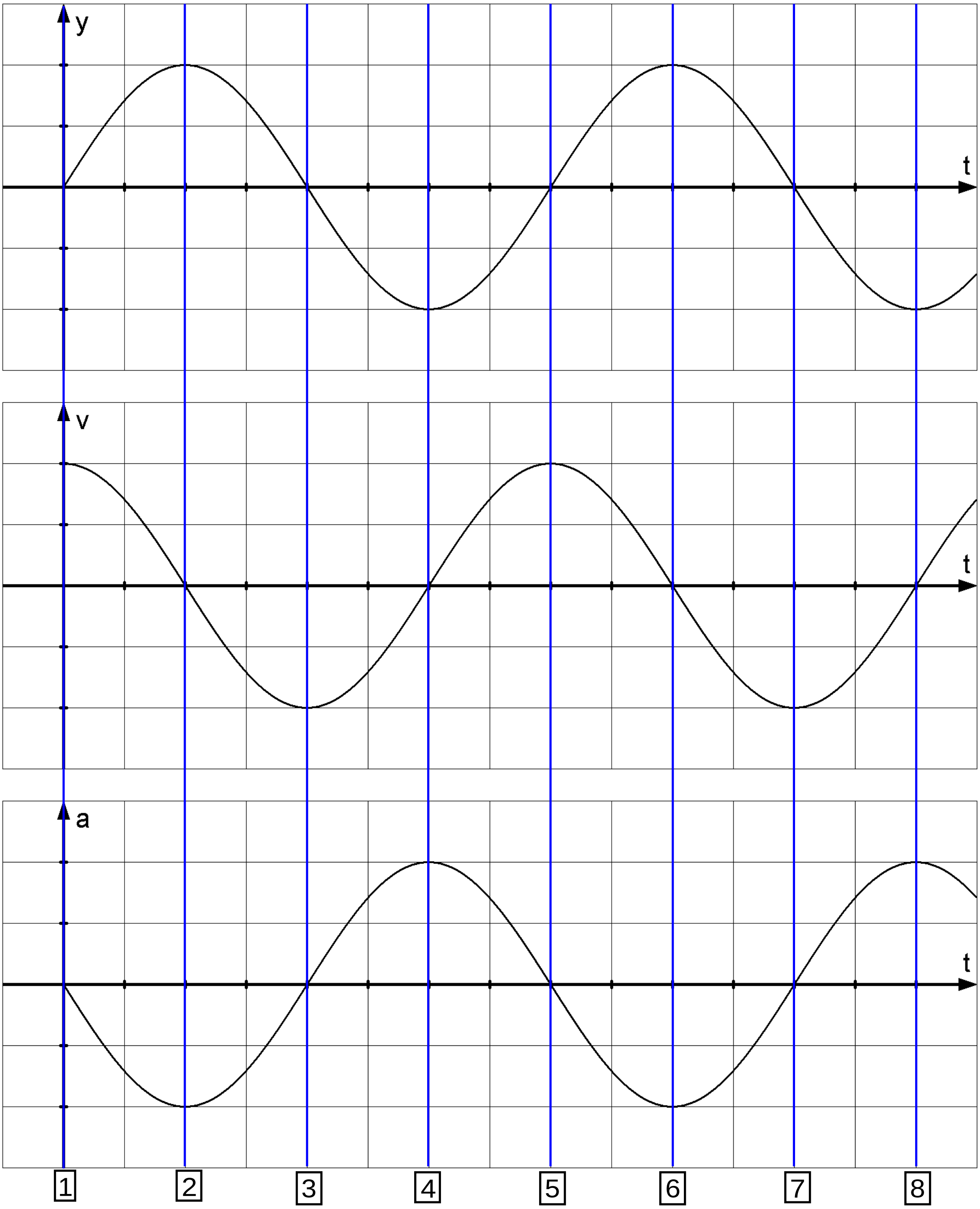
$$\ddot{y}(t)=-\omega^2\cdot y(t)$$

$$\boxed{\ddot{y}(t)+\omega^2\cdot y(t)=0}$$

10.4 Veranschaulichung dieser Zusammenhänge in den entsprechenden Diagrammen:

Wir nehmen zunächst an, dass die Pendelmasse zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in positiver Richtung durch die Nulllage schwingt.

$y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$



1 Körper startet aus der Ruhelage nach oben in positiver Richtung; seine Geschwindigkeit ist in diesem Moment positiv (da nach oben gerichtet) und maximal; seine Beschleunigung ist null.

1 – 2 Körper bewegt sich nach oben in positiver Richtung; seine Geschwindigkeit ist positiv, nimmt aber ab; seine Beschleunigung ist negativ (Verzögerung).

2 Körper befindet sich im oberen Umkehrpunkt, er hat maximale positive Auslenkung; seine Geschwindigkeit ist null; seine Verzögerung ist maximal.

2 – 3 Körper bewegt sich nach unten; er hat negative Geschwindigkeit, der Geschwindigkeitsbetrag nimmt zu; Beschleunigung negativ (da Geschwindigkeit negativ), nimmt aber zu.

3 Körper befindet sich in der Ruhelage (Nulldurchgang); sein Geschwindigkeitsbetrag ist maximal (Geschwindigkeit negativ, da Bewegung nach unten); Beschleunigung null

3 – 4 Körper bewegt sich nach unten; seine Geschwindigkeitsbetrag nimmt ab (Geschwindigkeit nimmt zu); Beschleunigung ist positiv

4 Körper befindet sich im unteren Umkehrpunkt, er hat maximale negative Auslenkung; seine Geschwindigkeit ist null; Beschleunigung ist maximal

4 – 5 Körper bewegt sich nach oben; seine Geschwindigkeit nimmt zu; Beschleunigung nimmt ab.

5 siehe 1

10.5 Berücksichtigung des Nullphasenwinkels

$\rho_0 = 0$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in der Ruhelage und bewegt sich nach oben.

$0 < \rho_0 < \frac{\pi}{2}$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ zwischen der Ruhelage und dem oberen Umkehrpunkt und bewegt sich nach oben.

$\rho_0 = \frac{\pi}{2}$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im oberen Umkehrpunkt.

$\frac{\pi}{2} < \rho_0 < \pi$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ zwischen dem oberen Umkehrpunkt und der Ruhelage und bewegt sich nach unten.

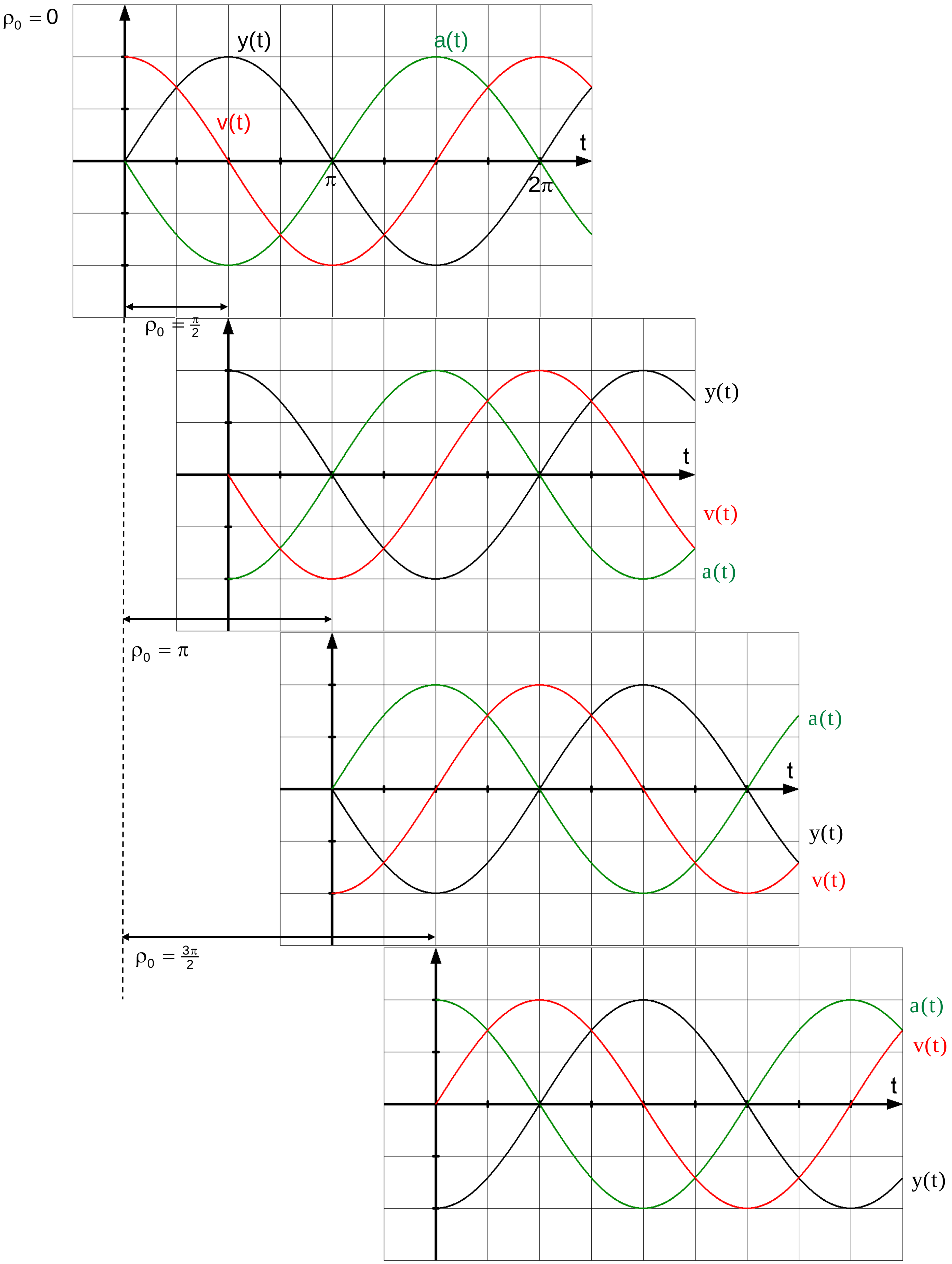
$\rho_0 = \pi$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in der Ruhelage und bewegt sich nach unten.

$\pi < \rho_0 < \frac{3\pi}{2}$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ zwischen der Ruhelage und dem unteren Umkehrpunkt und bewegt sich nach unten.

$\rho_0 = \frac{3\pi}{2}$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im unteren Umkehrpunkt.

$\frac{3\pi}{2} < \rho_0 < 2\pi$ Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ zwischen dem unteren Umkehrpunkt und der Ruhelage und bewegt sich nach oben.

Man kann auch alle drei Funktionen in ein Diagramm zeichnen!



Aufgaben

1.0 Ein Körper der Masse $m = 50\,g$ schwingt sinusförmig. In einer Zeit von $t = 10\,s$ vollendet er 8 Schwingungen. Die Zeitrechnung beginnt, wenn er die Nulllage in Richtung der positiven y-Achse passiert. Der Abstand der Umkehrpunkte beträgt $18\,cm$.

1.1 An welcher Stelle befindet sich der Körper nach $8,0\,s$?

$\left(y(t) = 0,09m \cdot \sin\left(1,6\tfrac{\pi}{s} \cdot t\right);\ y(8,0s) \approx 5,3cm\right)$

1.2 Wie groß sind seine Geschwindigkeit und seine Beschleunigung nach $8,0\,s$? Gib auch die Richtung dieser vektoriellen Größen bezüglich der y-Achse an!

$\left(v(t) = 0,144 \cdot \pi\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(1,6\tfrac{\pi}{s} \cdot t\right); v(8,0s) \approx -0,37\tfrac{m}{s}; \text{Körper bewegt s. nach unten}\right)$

$\left(a(t) = -0,2304 \cdot \pi^2\tfrac{m}{s^2} \cdot \sin\left(1,6\tfrac{\pi}{s} \cdot t\right); a(8,0s) \approx -1,3\tfrac{m}{s^2}; \text{Beschleunigt in neg. Richtung}\right)$

1.3 Berechne den Betrag der maximalen Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung!

$\left(|v_{max}| = A\omega \approx 0,45\tfrac{m}{s}; |a_{max}| = A\omega^2 \approx 2,3\tfrac{m}{s^2}\right)$

1.4 Berechne, zu welchen Zeiten sich der Körper im oberen Umkehrpunkt befindet!

$\left(t_n = \tfrac{5}{16}s + (n-1) \cdot T; n \in \mathbb{N}; \text{allgemeiner}: t_n = \left(n + \tfrac{1}{4}\right)T\right)$

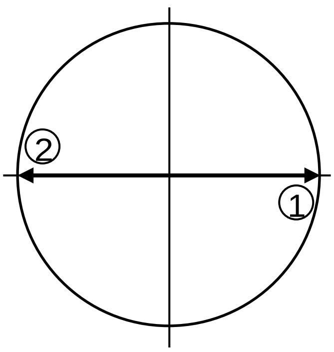
1.5 Gib eine Formel für die Rückstellkraft an!

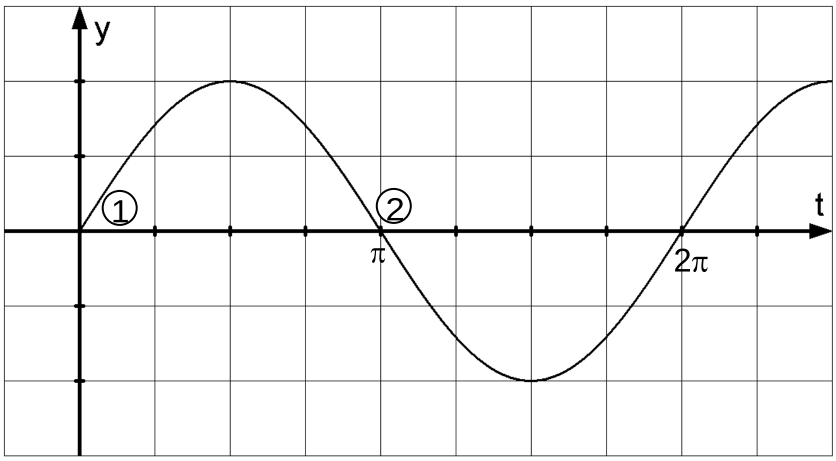
$\left(F_R = -Am\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \approx -0,11N \cdot \sin\left(1,6\tfrac{\pi}{s} \cdot t\right)\right)$

10.6 Aufstellen der Bewegungsgleichungen der harmonischen Schwingung bei unterschiedlichen Anfangsbedingungen mit Hilfe eines Zeiger- und Liniendiagramms

10.6.1 Der schwingende Körper durchläuft zum Zeitnullpunkt seine Ruhelage

Da man nicht weiß, in welche Richtung diese Bewegung erfolgt, muss man die beiden möglichen Fälle betrachten.





1\. Fall: Der Körper schwingt in Richtung positiver Elongation
Das ist der uns schon bekannte Fall mit $\rho_1 = 0$

$$y(t) = A\sin(\omega t)$$
$$v(t) = A\omega\cos(\omega t)$$
$$a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)$$

2\. Fall: Der Körper schwingt in Richtung negativer Elongation

Hier ist der Nullphasenwinkel $\rho_2 = \pi$

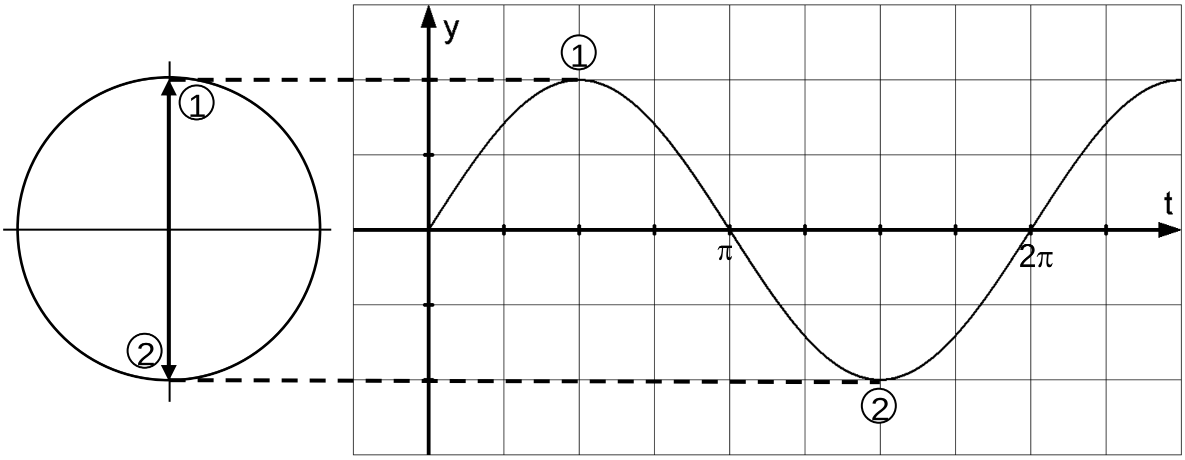
$$y(t) = A\sin(\omega t + \pi) = -A\sin(\omega t)$$

$$v(t) = -A\omega\cos(\omega t)$$

$$a(t) = A\omega^2\sin(\omega t)$$

10.6.2 Zum Zeitnullpunkt ist die Elongation maximal, der Körper im Umkehrpunkt

Da man auch hier nicht weiß, in welchem der beiden Umkehrpunkte sich der Körper befindet müssen auch hier wieder zwei Fälle unterschieden werden.



1. Fall: Der Körper befindet sich im oberen Umkehrpunkt

Hier gilt für den Nullphasenwinkel $\rho_1 = \frac{\pi}{2}$

$$y(t) = A\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{2}) = A\cos(\omega t)$$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t)$$

2. Fall: Der Körper befindet sich im unteren Umkehrpunkt

Hier gilt für den Nullphasenwinkel $\rho_2 = \frac{3\pi}{2}$

$$y(t) = A\sin(\omega t + \tfrac{3\pi}{2}) = -A\cos(\omega t)$$

$$v(t) = A\omega\sin(\omega t)$$

$$a(t) = A\omega^2\cos(\omega t)$$

10.6.3 Allgemeiner Fall

Hier ist in der Regel ein Wert für die Elongation $\left(y(0)=\frac{2}{3}A\right)$ zum Zeitpunkt $t=0$ gegeben. Wie unschwer zu erkennen ist, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

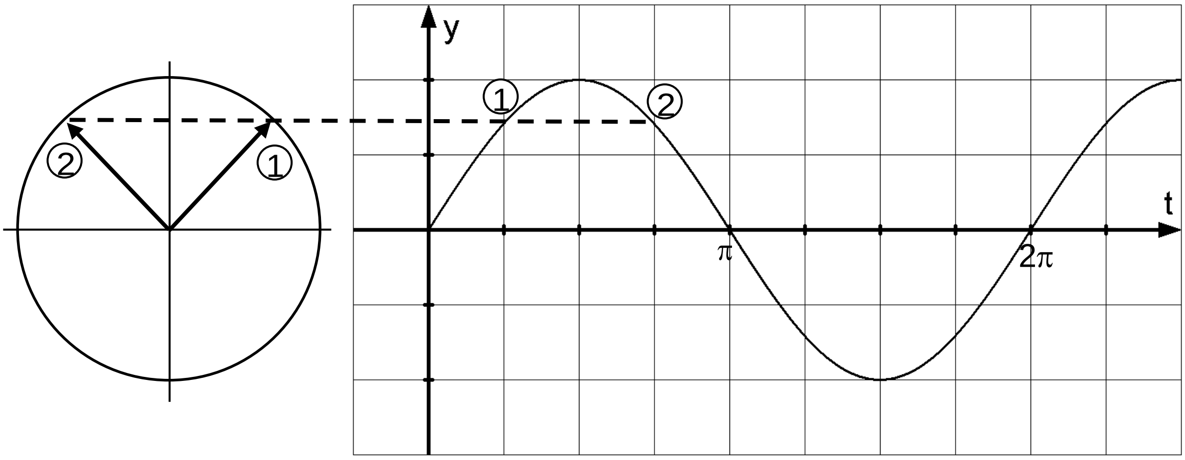
1. Fall: Allgemein gilt: $y(t)=A\sin(\omega t+\rho_1)$

$y(0)=A\sin(\rho_1)=\frac{2}{3}A \quad \Rightarrow \quad \sin(\rho_1)=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad \rho_1=41{,}8°$ Winkelmaß (TR auf DEG)

$\Rightarrow \quad \rho_1=0{,}730$ Bogenmaß (TR auf RAD)

$y(t)=A\sin(\omega t+0{,}730)$



2. Fall: Die zweite Lösung erhält man nun aus dem Zeigerdiagramm, denn es gilt:

$\rho_2=\pi-\rho_1=2{,}412 \quad (\rho_2=138{,}2°)$

$y(t)=A\sin(\omega t+2{,}412)$

Aufgaben

2.0 Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Pendelmasse mit 50% der Amplitude oberhalb der Nulllage auf dem Weg nach oben.

2.1 Berechne den Nullphasenwinkel ρ_0!

2.2 Die Amplitude der Schwingung betrage $30\,\text{cm}$ und die Periodendauer sei $T = 1,40\,\text{s}$. Gib die Zeit-Orts-Funktion an und berechne die Startgeschwindigkeit der Masse.

2.3 Welche Elongation (Geschwindigkeit und Beschleunigung) erhält man nach $1,0\,\text{s}$? Wo befindet sich die Pendelmasse und in welche Richtung bewegt sie sich?

2.4 Zu welchem Zeitpunkt beträgt die Elongation zum ersten mal $-10\,\text{cm}$?

2.5 Zu welchem Zeitpunkt ist der Betrag der Geschwindigkeit zum ersten mal Maximal?

2.6 Zu welchen Zeiten befindet sich die Pendelmasse im oberen Umkehrpunkt?

2.7 Zu welchen Zeiten durchläuft die Pendelmasse die Ruhelage?

3.0 Ein harmonisch schwingender Körper befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im unteren (negativen) Umkehrpunkt.

3.1 Stelle allgemein die Bewegungsgleichung für Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit auf.

3.2 Zeichne für $t = 0$ das Zeigerdiagramm für Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung in ein Diagramm! (Zeigerlängen beliebig wählbar)

3.3 Zeichne für $0 \le t \le T$ das Liniendiagramm für Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung in ein Diagramm! (passend zu den in 3.2 gewählten Zeigern)

3.4 Gegeben sei $A = 0,50\,\text{m}$ und $T = 1,0\,\text{s}$. Berechne s, v und a für den Zeitpunkt $t = 1,3\,\text{s}$.

4.0 Ein Körper schwingt harmonisch mit der Schwingungsdauer $T = 1,3\,\text{s}$ und der Amplitude $A = 12\,\text{cm}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ bewegt er sich nach unten und hat die Elongation $y_0 = 9,5\,\text{cm}$.

4.1 Wie groß ist der Nullphasenwinkel?

4.2 Gib die Schwingungsgleichung an!

4.3 Zu welchem Zeitpunkt t_1 hat der Körper zum 2. Mal die Elongation $y_1 = -5,6\,\text{cm}$ erreicht?

4.4 Zu welchen Zeitpunkten t_2 und t_3 erreicht er diese Elongation zum 3. und 4. Mal?

Bei der Beschreibung der Bewegungen am Kreis bzw. bei der Schwingung treten gleiche Größen mit verschiedenen Bedeutungen auf.

Größe	**Kreisbewegung**	**Schwingung**
r; A; $\hat{y}$; $\hat{s}$	Kreisbahnradius	Amplitude
T	Umlaufdauer	Perioden- bzw. Schwingungsdauer
$f = \frac{1}{T}$	Frequenz	Frequenz
ρ	Drehwinkel	Phasenwinkel
$\omega = 2\pi f$	Winkelgeschwindigkeit	Kreisfrequenz

10.7 Lineares Kraftgesetz

Bei einer Schwingung wirkt zu jedem Zeitpunkt eine Kraft, die die schwingende Masse immer wieder in ihre Ruhelage zurückzieht. Diese Kraft nennt man Rückstellkraft $\vec{F}_R$.
Nach dem 2. Newtonschen Gesetz gilt allgemein:

$$\vec{F}_R(t) = \vec{F}_a(t) = m \cdot \vec{a}(t) \quad \Rightarrow \quad F_R(t) = m \cdot a(t)$$

mit

$$a(t) = \ddot{s}(t) = -A\omega^2 \sin\left(\omega t + \rho_0\right)$$

folgt:

$$F_R(t) = \underbrace{-m \cdot \omega^2}_{D=\text{konst.}} \cdot \underbrace{A \sin\left(\omega t + \rho_0\right)}_{y(t)\ \text{bzw.}\ s(t)}$$

und somit gilt:

$$\boxed{F_R(t) = -D \cdot s(t)} \qquad \text{Lineares Kraftgesetz}$$

Da die beschleunigende Kraft bei der harmonischen Schwingung der Elongation entgegengerichtet ist (Minuszeichen) nennt man sie Rückstellkraft.

$D = m\omega^2$ bezeichnet man als die Richtgröße des schwingenden Systems, es handelt sich dabei um eine Systemkonstante.

Aus

$$D = m\omega^2 = m\left(\tfrac{2\pi}{T}\right)^2 = m\tfrac{4\pi^2}{T^2}$$

folgt:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\tfrac{m}{D}}} \qquad \text{Schwingungsdauer}$$

Merke: Eine harmonische Schwingung ist genau dann harmonisch, wenn das lineare Kraftgesetz gilt.

$$\boxed{\text{harmonische Schwingung} \Leftrightarrow \text{lineares Kraftgesetz}}$$

10.8 Differenzialgleichung der harmonischen Schwingung

Aus dem linearen Kraftgesetz

$$F_a(t) = F_R(t)$$

folgt mit Hilfe des 2. Newtonschen Gesetzes:

$$m \cdot a(t) = -D \cdot s(t)$$

mit

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

folgt somit:

$$m \cdot \ddot{s}(t) = -D \cdot s(t)$$

Durch eine kleine Umformung erhält man schließlich die Differenzialgleichung der ungedämpften harmonischen Schwingung:

$$\boxed{m \cdot \ddot{s}(t) + D \cdot s(t) = 0}$$

Das Lösen einer Differenzialgleichung ist in der Regel eine recht heikle Sache. Aber nicht für uns!
Gesucht ist also eine Funktion $s(t)$, welche die obige Differenzialgleichung erfüllt.
Lösungsansatz:

$$s(t) = A \cdot \sin\left(\omega t + \rho_0\right)$$

hieraus folgt:

$$\dot{s}(t) = A\omega \cdot \cos\left(\omega t + \rho_0\right)$$

$$\ddot{s}(t) = -A\omega^2 \cdot \sin\left(\omega t + \rho_0\right) = -\omega^2 \cdot s(t)$$

setzt man diese Beziehung in die Differenzialgleichung ein, so folgt:

$$m \cdot \ddot{s}(t) + D \cdot s(t) = -m\omega^2 \cdot s(t) + D \cdot s(t) = \left(-m\omega^2 + D\right) \cdot s(t) = 0$$

Da $s(t)$ nicht für alle Zeiten t gleich Null ist muss

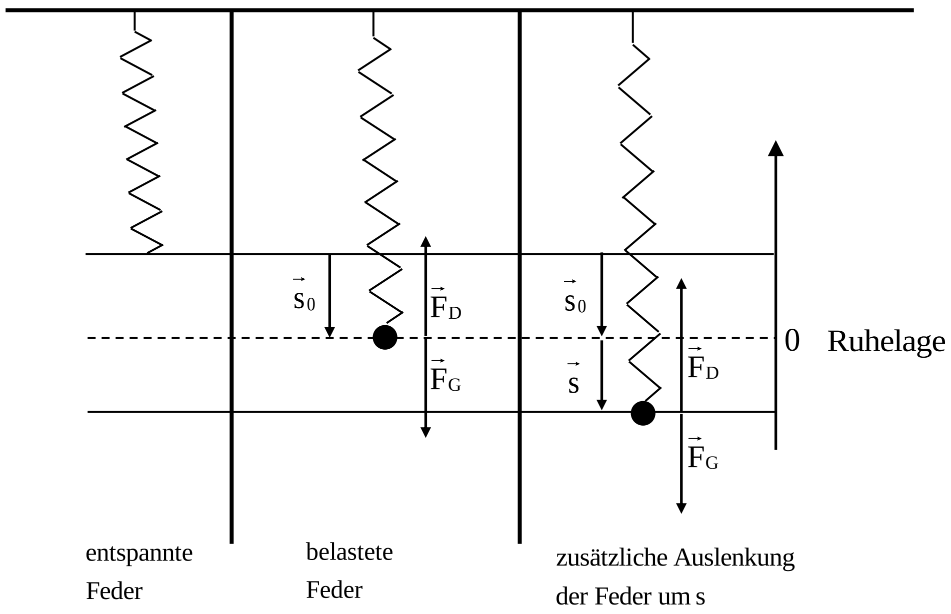
$$-m\omega^2 + D = 0$$

sein, also:

$$D = m\omega^2$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\tfrac{m}{D}}$$

10.9 Überprüfung der Gültigkeit des linearen Kraftgesetzes am vertikalen Federpendel (Schwere-Federpendel)



Die Schraubenfeder (Federkonstante D) ist zunächst entspannt.
Wird nun an die Schraubenfeder ein Körper der Masse m gehängt, so wird sie durch dessen Gewichtskraft $\vec{F}_G = m\vec{g}$ um die Strecke s_0 gedehnt (vorgespannt).
Für die Gleichgewichtslage des Pendels gilt:

$$\vec{F}_D = -\vec{F}_G$$
$$-D\cdot\vec{s}_0 = -m\cdot\vec{g}$$
$$D\cdot\vec{s}_0 = m\cdot\vec{g} \qquad (1)$$

Lenkt man nun den Pendelkörper zusätzlich um die Strecke s aus, so versetzt man es in vertikale Schwingung. Die nach unten gerichtete Gewichtskraft $\vec{F}_G$ bleibt konstant, während sich die elastische Federkraft $\vec{F}_D$ mit der Dehnung $s_0 + s$ ändert.

Für die rücktreibende Kraft $\vec{F}_R$ gilt:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_D + \vec{F}_G$$
$$\vec{F}_R = D\left(-\vec{s}_0 - \vec{s}\right) + m\vec{g}$$
$$\vec{F}_R = -D\vec{s}_0 - D\vec{s} + m\vec{g} \overset{(1)}{=} -m\vec{g} - D\vec{s} + m\vec{g} = -D\vec{s}$$
$$\vec{F}_R = -D\vec{s}$$

daraus folgt dann:

$$\boxed{F_R = -D\cdot s}$$ Lineares Kraftgesetz

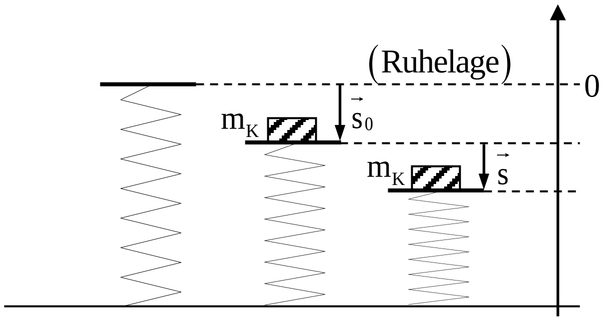
Das Minuszeichen besagt dabei, dass die Kraft von der Feder selbst aufgebracht wird. (Die Gewichtskraft ist positiv, da sie von außen aufgebracht wird!)

Die Masse der Feder bleibt dabei unberücksichtigt!

Merke: Bei einer Einzelfeder ist die Federkonstante D identisch mit der Richtgröße D des Federpendels.

Aufgaben:

5.0 Eine Feder, für die das Hooksche Gesetz gilt und deren Masse unberücksichtigt bleibt wird senkrecht auf eine feste Unterlage angebracht. Auf dieser Feder befindet sich ein Teller dessen Masse m_T vernachlässigt werden kann. Diese Tellerfederwaage (eine technische Anwendung wäre ein Schüttelsieb) befindet sich in der Ruhelage. Legt man nun auf den Teller einen Körper der Masse m_K, so wird die Feder um die Strecke s_0 gestaucht.



5.1 Die Tellerfederwaage hat bei der maximalen Belastung mit der Masse $m_{Max} = 10,0\,kg$ ein maximale Stauchung von $s_{Max} = 10,0\,cm$. Berechnen Sie bis zu welcher Stelle s_0 der Teller ausgelenkt wird wenn man einen Körper der Masse $m_K = 1,50\,kg$ auf den Teller legt?

$\left[\text{Teilergebnis}: D = 981\frac{N}{m}\right]$

5.2.0 Die Tellerfederwaage wird nun um $\hat{s} = 1,00\,cm$ nach unten gedrückt und zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,s$ losgelassen.

5.2.1 Zeigen Sie zunächst allgemein, dass die Tellerfederwaage eine harmonische Schwingung vollführt.

5.2.2 Zeigen Sie ausgehend von der Rückstellkraft $F_R = -Ds$, dass gilt:

$$D = m \cdot \omega^2$$

5.2.3Berechnen Sie mit Hilfe der Gleichung von 1.2.2 mit welcher Frequenz das System schwingt? Führen Sie auch eine Einheitenkontrolle durch.

5.2.4 Untersuchen Sie, ob man mit dieser Tellerfederwaage ein „Sekundenpendel“ erhalten könnte?

5.2.5Um welche Strecke müsste die Tellerfederwaage mindestens nach unten ausgelenkt werden, damit der Körper im oberen Umkehrpunkt vom Teller abhebt?

10.10 Kombinationen von Federn

Nun werden zwei Federn der Federhärte D_1 und D_2 in Reihe bzw. Parallel aufgehängt.

<u>Reihenschaltung</u>:
Bei der Reihenschaltung wirkt auf jede Feder die gleiche Kraft F.

$$F = F_G$$

Insgesamt werden die beiden Federn um die Strecke s gedehnt.

$$s = s_1 + s_2$$

Aus dem Hook´schen Gesetz $F = D \cdot s$ folgt mit $s = \frac{F}{D}$:

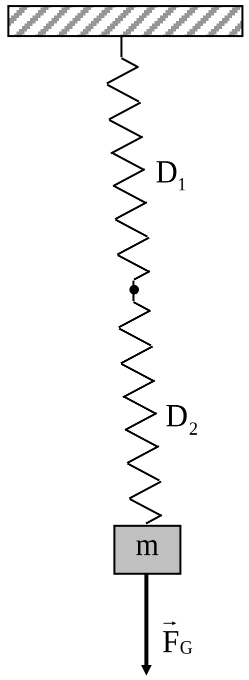
$$\frac{F}{D} = \frac{F}{D_1} + \frac{F}{D_2}$$

Dividiert man die Gleichung noch durch F so folgt:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$$

und daraus schließlich für die Federhärte (Richtgröße) des Systems:

$$D = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}$$



Man kann zeigen, dass die Federhärte der Reihenschaltung weicher ist als die weichste der zwei Federn:

Sei $D_1 < D_2$, dann gilt: $D = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} < \frac{D_1 D_2}{D_2} = D_1 \;\Rightarrow\; D < D_1$

Verallgemeinerung: Für ein System aus n in Reihe gehängten Federn gilt:

$$\frac{1}{D} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D_i}$$

<u>Parallelschaltung</u>:
Bei der Parallelschaltung wird jede Feder um die gleiche Strecke s gedehnt:

$$s = s_1 = s_2$$

Die Gesamtkraft $F = F_G$ die auf die Federn wirkt verteilt sich auf beide Federn.

$$F = F_1 + F_2$$

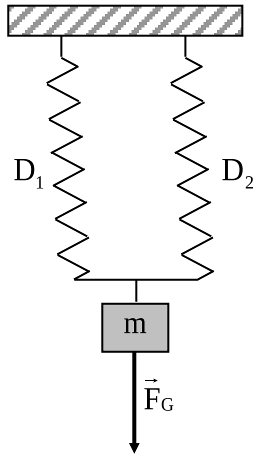
Aus dem Hook´schen Gesetz $F = D \cdot s$ folgt somit:

$$Ds = D_1 s_1 + D_2 s_2$$

$$Ds = D_1 s + D_2 s$$

Dividiert man die Gleichung noch durch s, so folgt für die Federhärte (Richtgröße) des Systems:

$$D = D_1 + D_2$$



Anhand der Formel erkennt man schon, dass die Federhärte des Systems härter ist als die der härtesten Feder.

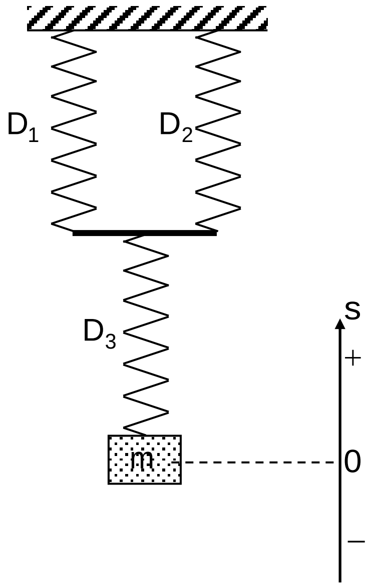
Verallgemeinerung: Für ein System aus n Parallel gehängten Federn gilt:

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i$$

Die Federhärte entspricht der Steigung der Ursprungshalbgeraden im s-F-Diagramm.
Systeme aus drei Federn gleicher Federhärte können untersucht werden (Reihe; Parallel; Parallel-Reihe)!
Systeme aus n Federn gleicher Federhärte die entweder alle in Reihe oder alle Parallel gehängt sind können untersucht werden!

Aufgaben:

6.0 Gegeben ist die nebenstehende Anordnung dreier Federn mit den Federhärten $D_1 = D_2$ und $D_3 = 2 \cdot D_1$. Das System schwingt harmonisch mit der Periodendauer $T = 1{,}40\,\text{s}$. Die schwingende Gesamtmasse beträgt $m = 5{,}00\,\text{kg}$. Die Massen der Federn und der Querverbindung sind zu vernachlässigen. Am Schwerpunkt der schwingenden Masse wird ein Zeiger angebracht, der die jeweilige Auslenkung $s(t)$ gegenüber der Nulllage anzeigt. Das System wird als ungedämpft betrachtet.



6.1 Ermitteln Sie zunächst die Federhärten der einzelnen Federn aus den gegebenen Daten.
$\left[\text{Rechnen Sie weiter mit der Richtgröße } D = 101\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$

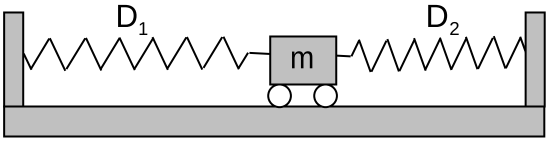
6.2.0 Die schwingende Masse bewegt sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ durch die Ruhelage in negative Richtung.

6.2.1 Geben Sie die Gleichung für die Auslenkung $s(t)$ mit eingesetzten Zahlenwerten an, wenn die Masse zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ eine Geschwindigkeit vom Betrag $71{,}8\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ besitzt.
$\left[\text{Rechnen Sie weiter mit } v(t) = -71{,}8\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{0{,}700\,\text{s}} \cdot t\right)\right]$

6.2.2 Geben Sie die Gleichung für die Rückstellkraft (mit eingesetzten Zahlenwerten) als Funktion der Zeit t an und berechnen Sie den Zeitpunkt t_2, zu dem die Rückstellkraft zum zweiten mal einen Wert von $F_R(t_2) = 12{,}0\,\text{N}$ besitzt.

6.2.3 Berechnen Sie die Gesamtenergie des schwingenden Systems und den Zeitpunkt t_3, bei dem die kinetische Energie des Systems zum dritten mal 75% der Gesamtenergie beträgt.

Beispiel: Bestimme die Federkonstante der folgenden Anordnung!



Wird der Wagen durch die Kraft F nach rechts um die Strecke s ausgelenkt, so treten folgende Gegenkräfte auf.

Rückstellkraft F_1 der Feder 1 nach links: $F_1 = -D_1 \cdot s$

Rückstellkraft F_2 der Feder 2 nach links: $F_2 = -D_2 \cdot s$

Für die Rückstellkraft F_R gilt:

$$F_R = F_1 + F_2$$
$$F_R = -D_1 \cdot s - D_2 \cdot s$$
$$F_R = -(D_1 + D_2)s = -D \cdot s \qquad \text{Lineares Kraftgesetz}$$

mit $D = D_1 + D_2$.

10.11 Das Fadenpendel

Lenkt man einen Pendelkörper der Masse m aus der Ruhelage um den Winkel ρ aus, so lässt sich die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ auf den Pendelkörper in eine Komponente $\vec{F}_S$ (Spannkraft) längs des Fadens und eine Komponente $\vec{F}_R$ (Rückstellkraft) in Richtung der Bahntangente zerlegen.
Für die Rückstellkraft gilt:

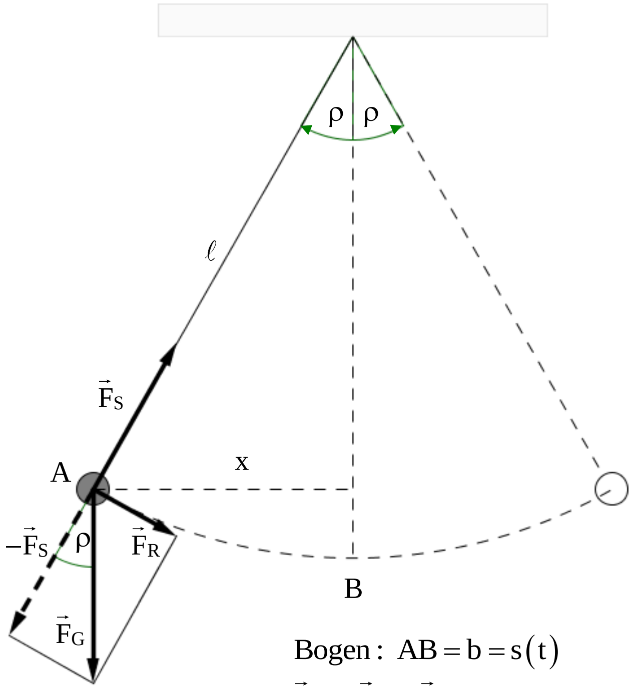
$$F_R \overset{(1)}{=} F_G \sin(-\rho) = -mg\sin\rho$$

$$F_R \overset{(2)}{=} -mg\sin\left(\frac{s}{l}\right) \overset{(3)}{=} -mg\frac{s}{l}$$

$$F_R = -\frac{mg}{l}s = -D\cdot s$$

mit $D = \frac{mg}{l}$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Bogen: $AB = b = s(t)$

$\vec{F}_G = \vec{F}_R + \vec{F}_S$

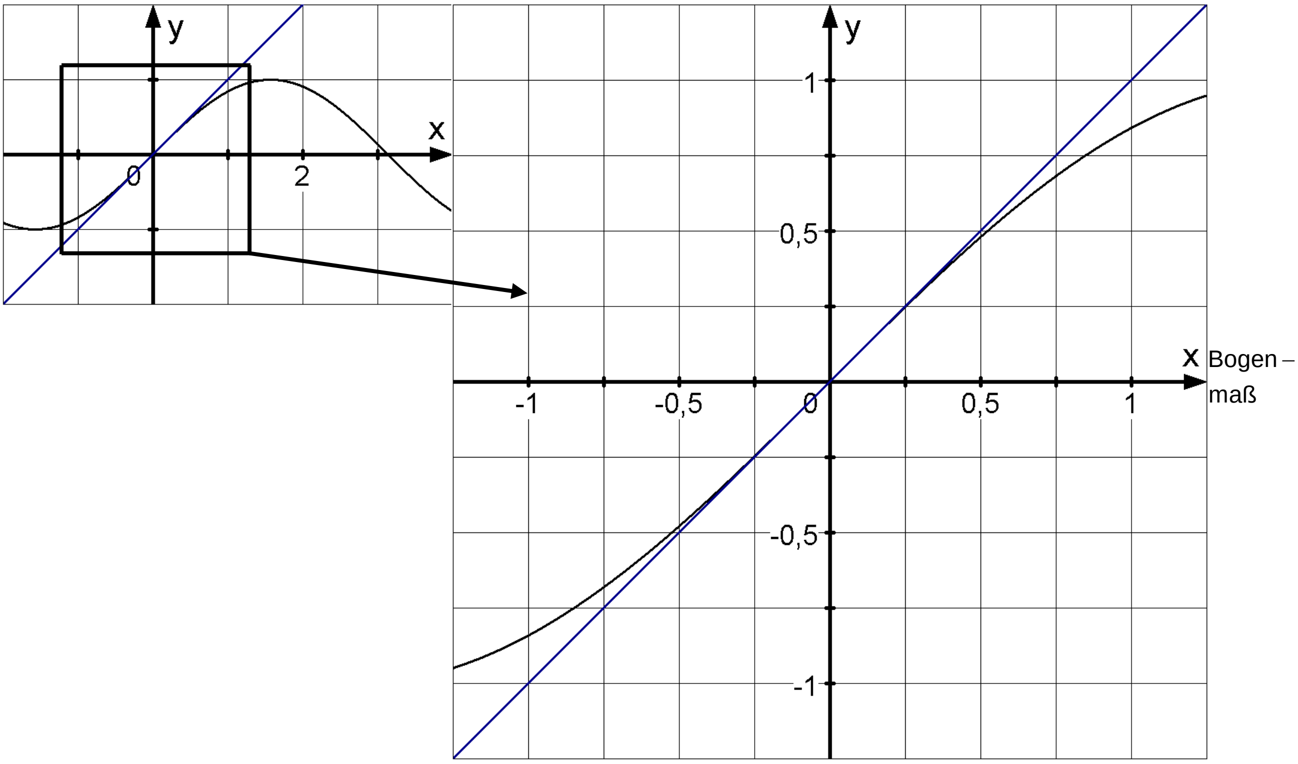
(1) Da die Auslenkung entgegen der Rücktreibenden Kraft gerichtet ist.

(2) Definition des Winkels ρ im Bogenmaß: $\rho = \frac{s}{l}$

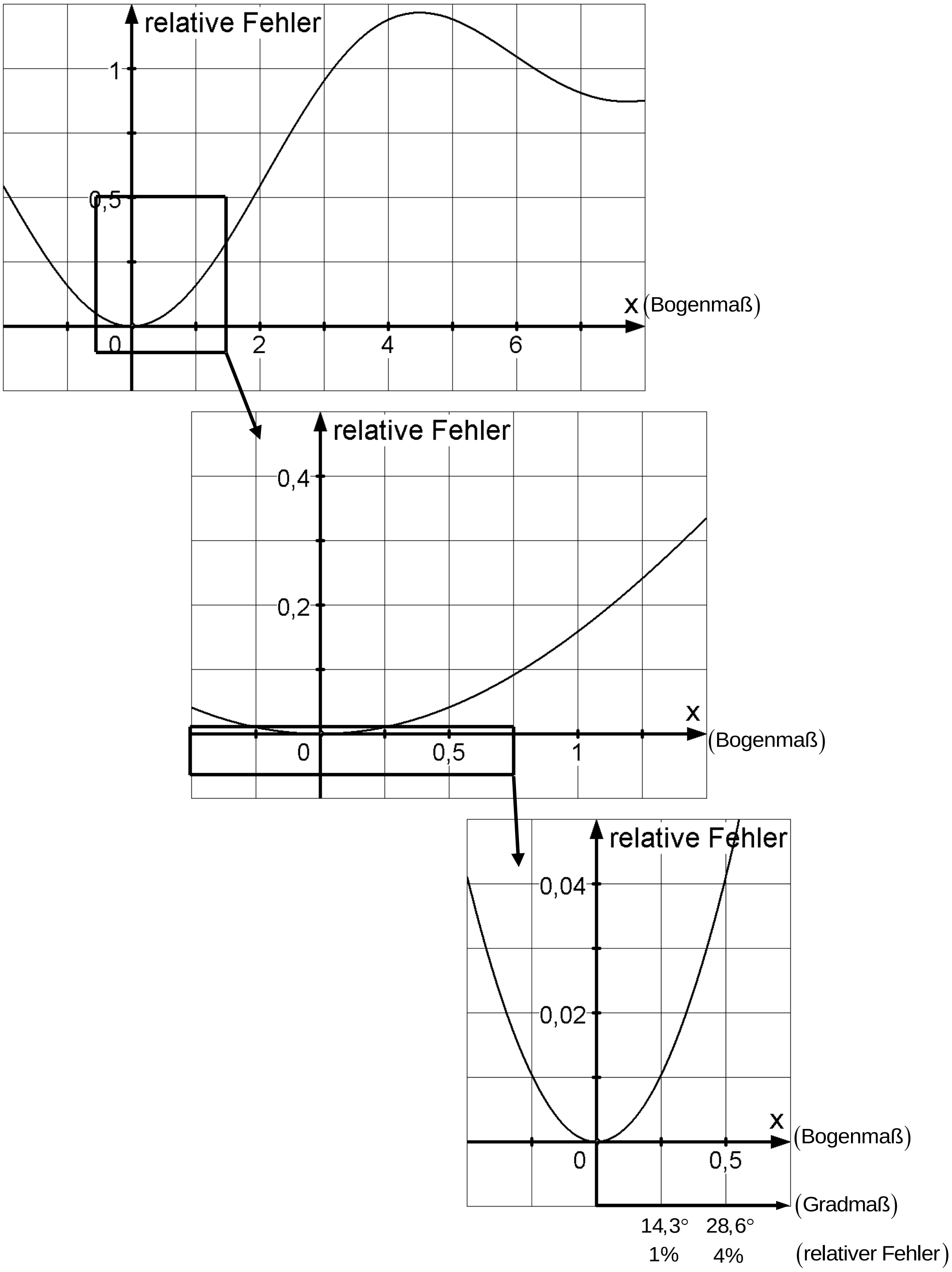
$\left(360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi = \frac{2\pi r}{r}; 180° = \pi = \frac{2\pi r\cdot\frac{1}{2}}{r}; 90° = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi r\cdot\frac{1}{4}}{r}\right)$

(3) Der Sinus eines kleinen Winkels kann durch sein Argument angenähert werden.

Es gilt: $\sin x \approx x$ für sehr kleine Werte von x (FS S.38 B2)
Der Graph der Sinusfunktion verläuft in der Nähe des Koordinatenursprungs nahezu identisch mit der Winkelhalbierenden des I. u. III. Quadranten.



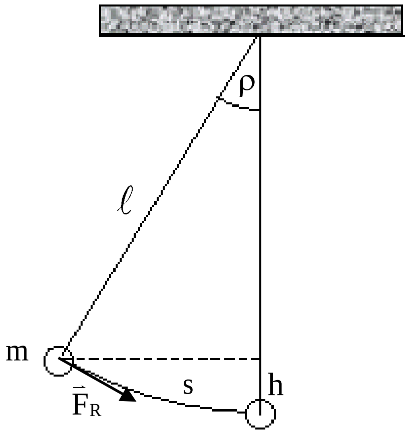
Welchen relativen Fehler $r(x)=\frac{x-\sin x}{x}$ man durch diese Näherung macht erhält man aus folgenden Graphiken.



Experimentelle Bestimmung der Fallbeschleunigung g durch messen der Periodendauer T und der Länge l des Fadens!

Aufgaben:

7.0 Das Pendel einer Uhr kann durch ein Fadenpendel idealisiert werden. Dabei wird die Masse m eines Fadenpendels nach links um den Winkel ρ ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0\,\text{s}$ losgelassen. Für verschiedene Längen ℓ des Pendels wird die Periodendauer T bestimmt.
Es ergibt sich folgende Messreihe:



ℓ in m	0,10	0,15	0,30	0,50	0,75
T in s	0,63	0,78	1,10	1,42	1,74

7.1 Zeigen Sie, durch graphische Auswertung der Messreihe, dass die Gleichung $T = k \cdot \sqrt{\ell}$ gilt, wobei k eine Konstante ist.
$\left(\text{Massstab}: 0{,}1\sqrt{\text{m}} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}; 0{,}2\,\text{s} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}\right)$

7.2 Ermitteln Sie mit Hilfe des Diagramms von 3.1 die Länge des Pendels, so dass man ein Sekundenpendel $(T = 1{,}00\,\text{s})$ erhält.

7.3 Zeigen Sie, durch allgemeine Herleitung, dass für die Koordinate F_R der Rückstellkraft gilt:
$F_R = -\frac{mg}{\ell} \cdot s$, wobei g der Betrag der Fallbeschleunigung ist.

7.4 Leiten Sie, ausgehend von der Formel für die Periodendauer der harmonischen Schwingung, eine Beziehung zur Berechnung der konstanten k her und berechnen Sie daraus den Ortsfaktor g.
$\left(\text{Ergebnis}: k = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)$

7.5 Wie lange würde es dauern, bis ein Pendel mit der Länge $\ell = 0{,}25\,\text{m}$ gegenüber einem rechnerischen Sekundenpendel um genau eine Sekunde vorgeht?
(Rechnen Sie mit $g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

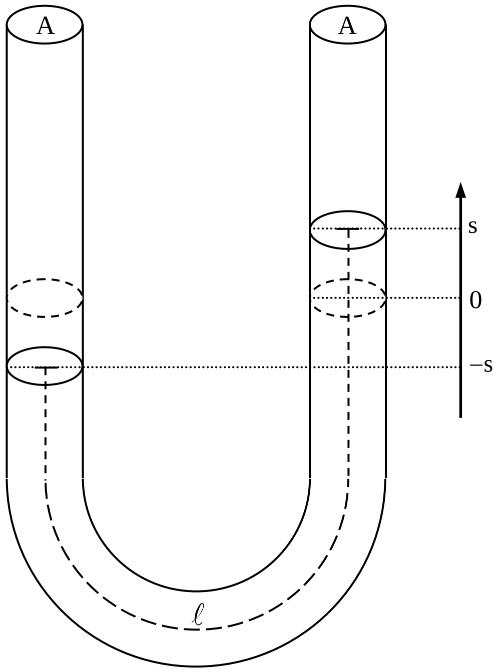
7.6 Begründen Sie, warum die Periodendauer T von der Auslenkhöhe h unabhängig ist.

7.7 Leiten Sie ausgehend vom linearen Kraftgesetz die Differentialgleichung für die ungedämpfte harmonische Schwingung her, geben Sie eine Lösung dieser Gleichung an und zeigen Sie, dass gilt:

$$D = m \cdot \omega^2$$

7.8 Ein Pendel der Länge $\ell = 0{,}25\,\text{m}$ wird um $\rho = 15°$ nach links ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0\,\text{s}$ losgelassen. Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit des Pendel sowie den Betrag der Beschleunigung nach einer Zeit von $t_1 = 0{,}15\,\text{s}$.

10.12 Das U-Rohr



Ein U-Rohr besitzt an jeder Stelle den selben Querschnitt A und ist zum Teil mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ gefüllt. Durch Änderung des Drucks in einem Schenkel kann die Flüssigkeitssäule aus dem Gleichgewicht gebracht werden. Gibt man sie wieder frei, so schwingt die Flüssigkeit hin und her. (Von Adhäsions- und Reibungskräften wird abgesehen)

Bei Auslenkung der Flüssigkeitssäule um die Strecke s ergibt sich für die Rückstellkraft F_R:

$$F_R = \Delta m \cdot g = \rho \cdot \Delta V \cdot g = \rho \cdot A \cdot 2s \cdot g$$

Berücksichtigt man, dass F_R und s entgegengesetzt orientiert sind, so folgt:

$$F_R = -\underbrace{2 \cdot \rho \cdot A \cdot g}_{D} \cdot s = -D \cdot s$$

mit der Richtgröße $D = 2 \cdot \rho \cdot A \cdot g = \text{konst.}$
Somit ist die Schwingung im U-Rohr harmonisch.

Für die Periodendauer T folgt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho \cdot V}{2 \cdot \rho \cdot A \cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho \cdot A \cdot \ell}{2 \cdot \rho \cdot A \cdot g}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2 \cdot g}}}$$

Dabei ist m die Masse der Flüssigkeit und ℓ die mittlere Gesamtlänge der Flüssigkeitssäule im U-Rohr!

Aufgaben:

8.0 Man füllt in ein $U-\text{Rohr}$ mit kreisförmigen Querschnitt und dem Durchmesser $d = 5{,}00\,\text{mm}$ Quecksilber mit der Masse $m = 600\,\text{g}$. Durch geeignete Maßnahmen wird das flüssige Quecksilber zum Schwingen gebracht. Die Dichte von Quecksilber beträgt $\rho = 13{,}6\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

8.1 Zeigen Sie, durch nachvollziehbare allgemeine Herleitung (evtl. mit Skizze), dass die Quecksilbersäule harmonisch schwingt, wenn man von Reibungs-, Adhäsions- und Kohäsionskräften absieht!

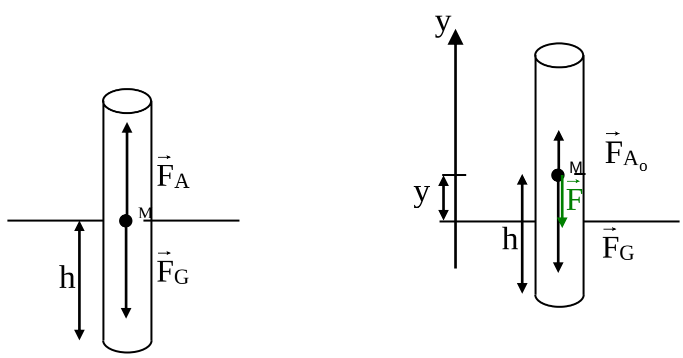
8.2 Berechne Sie die Periodendauer T der schwingenden Quecksilbersäule aus den unter 4.0 angegebenen Daten.

8.3 Berechnen Sie, wie viel Gramm Glycerin mit der Dichte $\rho = 1{,}26\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ in das $U-\text{Rohr}$ eingefüllt werden müsste, um dieselbe Schwingungsdauer zu erzielen!

10.13 Körper in einer Flüssigkeit

Ein Körper, der an jeder Stelle den selben Querschnitt A besitzt schwimmt in einer Flüssigkeit der Dichte ρ. Durch leichtes Anheben bzw. Untertauchen des Körpers kann dieser aus seiner Gleichgewichtslage gebracht werden. Gibt man ihn wieder frei, so schwingt der Körper auf und ab. (Von Adhäsions- und Reibungskräften wird abgesehen)
Ein konkretes Beispiel findet man in der AP 2007 Aufgabe II:
In einem Gefäß befindet sich eine Flüssigkeit der Dichte ρ. In dieser Flüssigkeit schwimmt stabil ein mit Bleichschrot beschwertes zylinderförmiges Reagenzglas mit der Querschnittsfläche A und der Gesamtmasse m. Auf dem Reagenzglas ist eine Markierung M angebracht, bis zu der das Reagenzglas in der Gleichgewichtslage in die Flüssigkeit eintaucht. Aus dieser Gleichgewichtslage wird das Reagenzglas nach oben gezogen und dann losgelassen. Nun schwingt das Reagenzglas in vertikaler Richtung auf und ab.

Gleichgewichtslage	Auslenkung nach oben



In der Gleichgewichtslage wird die auf das Reagenzglas wirkende Gewichtskraft durch die Auftriebskraft kompensiert. Es gilt:

$$\begin{aligned} F_G &= F_A \\ m \cdot g &= \rho \cdot g \cdot V \\ m \cdot g &= \rho \cdot g \cdot A \cdot h \qquad (4) \end{aligned}$$

Wird das Reagenzglas nach oben ausgelenkt, dann gilt für die beschleunigende Kraft F:

$$F = F_{A_o} - F_G = \rho \cdot g \cdot A \cdot (h - y) - m \cdot g = \underbrace{\rho \cdot g \cdot A \cdot h}_{m \cdot g} - \rho \cdot g \cdot A \cdot y - m \cdot g = -\rho \cdot g \cdot A \cdot y$$

Somit gilt: $F = -\underbrace{\rho \cdot g \cdot A}_{D} \cdot y = -D \cdot y$ mit $D = \rho \cdot g \cdot A$

Also gilt das lineare Kraftgesetz, das Reagenzglas schwingt harmonisch.

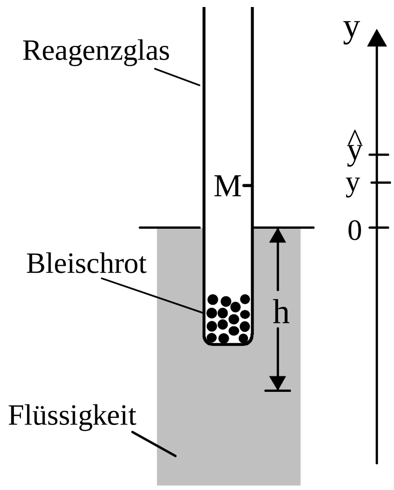
Bemerkung: Da die Auftriebskraft um das aus dem Wasser angehobene Volumenanteil verringert wird, gilt:

$$F_{A_o} = \rho \cdot g \cdot A \cdot (h - y)$$

Für die Periodendauer der harmonischen Schwingung folgt somit

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\rho \cdot A \cdot g}}$$

9.0 **(2007 A II)** Ein Körper, der sich in einer Flüssigkeit befindet, erfährt eine Auftriebskraft $\vec{F}_A$. Der Betrag dieser Kraft $\vec{F}_A$ ist genau so groß wie der Betrag der Gewichtskraft der Flüssigkeit, die vom Körper verdrängt wird.
In einem Gefäß befindet sich eine Flüssigkeit mit der Dichte ρ. In dieser Flüssigkeit schwimmt stabil ein mit Bleischrot beschwertes zylinderförmiges Reagenzglas mit der Querschnittsfläche $A = 2{,}8\,\text{cm}^2$ und der Gesamtmasse $m = 35\,\text{g}$.
Auf dem Reagenzglas ist eine Markierung M angebracht, bis zu der das Reagenzglas in der Gleichgewichtslage in die Flüssigkeit eintaucht. Bei der zugehörigen Eintauchtiefe h halten sich die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ des mit Bleischrot beschwerten Reagenzglases und die auf das Reagenzglas wirkende Auftriebskraft das Gleichgewicht.



Aus dieser Gleichgewichtslage wird das Reagenzglas nach oben gezogen und dann losgelassen. Nun schwingt das Reagenzglas in vertikaler Richtung auf und ab.
Die Elongation der Markierung M wird mit y bezeichnet (siehe Skizze).
Bei der Bearbeitung der folgenden Aufgaben sind Dämpfungsverluste zu vernachlässigen.

9.1 Begründen Sie, dass das Reagenzglas harmonisch schwingt, und zeigen Sie, dass für die Periodendauer T dieser Schwingung gilt: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\rho \cdot A \cdot g}}$

9.2.0 Das Reagenzglas wird nach oben gezogen und zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ aus der Ruhe heraus losgelassen. Es schwingt nun mit der Amplitude $\hat{y} = 3{,}0\,\text{cm}$ und der Schwingungsdauer $T = 0{,}80\,\text{s}$.

9.2.1 Die Elongation y der Markierung M ist abhängig von der Zeit t.
Bestimmen Sie eine Gleichung mit eingesetzten Werten, die diese Abhängigkeit aufzeigt.

9.2.2 Zum Zeitpunkt t_2 befindet sich die Markierung M zum zweiten Mal $1{,}8\,\text{cm}$ oberhalb der Flüssigkeitsoberfläche.
Berechnen Sie t_2.

9.2.3 Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung der Geschwindigkeit des Reagenzglases für den Zeitpunkt $t^* = 0{,}25\,\text{s}$.

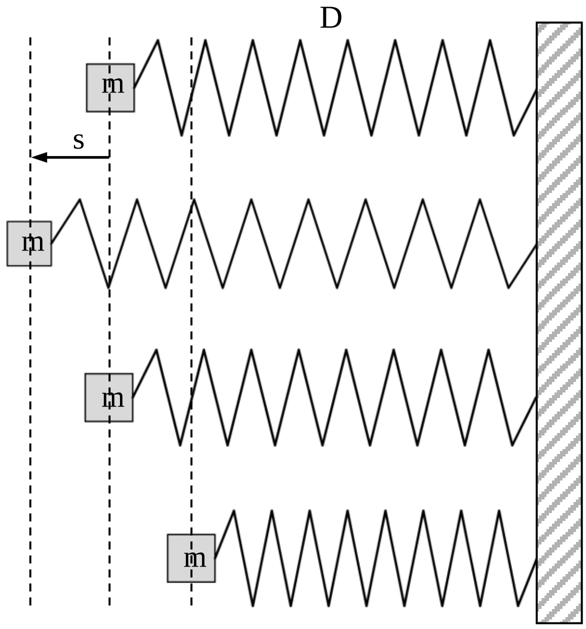
10. Eine Feder dehnt sich beim Anhängen einer Masse von $m_1 = 500\,\text{g}$ um $s_0 = 10\,\text{cm}$.
Bei einer angehängten Masse von $m_2 = 1{,}0\,\text{kg}$ wird eine Schwingungsdauer von $T = 0{,}92\,\text{s}$ gemessen. Diese ist größer als die errechnete, da ein Teil der Federmasse auch mitschwingt, in der Formel aber nicht berücksichtigt ist.
Berechnen Sie die Größe der „schädlichen“ Federmasse!

11. Im Rahmen des Apolloprogramms wurde von den Astronauten folgendes Experiment auf dem Mond zur Bestimmung der Fallbeschleunigung mit Hilfe eines Fadenpendels unbekannter Länge durchgeführt:
Sie bestimmten zunächst die Schwingungsdauer $T_1 = 4{,}0\,\text{s}$ und nach Verlängerung der Pendellänge um $\Delta\ell = 1{,}36\,\text{m}$ die Schwingungsdauer $T_2 = 7{,}0\,\text{s}$.
Berechnen Sie aus diesen Messdaten die Fallbeschleunigung g_M auf dem Mond.
Hinweis: Mit diesem Verfahren lässt sich der Einfluss der in Abweichung von der Theorie nicht punktförmigen Masse ausschalten.

12.0 Man füllt in ein U-Rohr vom Durchmesser $d = 3{,}4\,\text{mm}$ Quecksilber der Masse $m_Q = 25\,\text{g}$ $\left(\rho_Q = 13{,}8\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right)$. Durch geeignete Maßnahmen wird die Quecksilbersäule zum Schwingen angeregt.
12.1 Zeigen Sie, dass die entstandene Schwingung eine harmonische Schwingung ist. (Von Reibungs-, Kohäsions- und Adhäsionskräften soll abgesehen werden)Berechnen Sie die Schwingungsdauer dieser Schwingung zuerst allgemein, dann speziell aus den oben angegebenen Daten!
12.2 Wie viel Gramm Wasser müsste man an Stelle von Quecksilber einfüllen, um dieselbe Schwingungsdauer zu erzielen?
12.3 Eine bestimmte Schwingung dieser Anordnung habe die Frequenz $f = 0{,}50\,\text{Hz}$ und die Amplitude $A = 5{,}0\,\text{cm}$.
Berechnen Sie die Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung $3{,}7\,\text{s}$ nach dem Durchgang durch die Ruhelage in positiver Richtung!
12.4 Stellen Sie die Elongation s als Funktion der Zeit t im Zeitintervall $0\,\text{s} \le t \le 2{,}5 \cdot T$ graphisch dar (ohne Berücksichtigung der Reibung).
12.5 Welche Veränderung erfährt der in 3.5 ermittelte Graph, wenn von der Reibung nicht abgesehen wird?

13. Wie lang muss ein Fadenpendel sein, damit es eine Schwingungsdauer von genau $2{,}00\,\text{s}$ besitzt (sogenanntes „Sekundenpendel“)?

10.14 Der Energieerhaltungssatz bei der harmonischen Schwingung



Wird eine Feder um die Strecke s aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, so muss an dieser Arbeit verrichtet werden. Dazu ist eine Kraft nötig, die der Rückstellkraft entgegengesetzt gerichtet ist.

$$F_{Ausl.} = -F_R = Ds = Dx$$

Für die Verschiebearbeit folgt somit:

$$W_{0s} = \int_0^s Dx\,dx = \left[\tfrac{1}{2}Dx^2\right]_0^s = \tfrac{1}{2}Ds^2$$

Diese Arbeit ist nun in Form von potentieller Energie in der Feder gespeichert. Für die potentielle Energie der Feder gilt somit:

$$W_{0s} = \tfrac{1}{2}Ds^2 = \Delta E_{pot} = E_{pot(s)} - \underbrace{E_{pot(0)}}_{0} = E_{pot(s)}$$

also:

$$\boxed{E_{pot} = \tfrac{1}{2}Ds^2}$$

Lässt man die Feder nun los, so wird diese potentielle Energie kontinuierlich in kinetische Energie umgewandelt. Beim Durchgang durch die Ruhelage liegt ausschließlich kinetische und keine potentielle Energie mehr vor (E_{kin} ist maximal beim Durchgang durch die Ruhelage). Nach dem Durchgang durch die Ruhelage kehrt sich dieser Prozess wieder um, bis beim nächsten Umkehrpunkt die potentielle Energie wieder maximal ist und keine kinetische Energie mehr vorliegt.

Für die potentielle Energie gilt:

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2}Ds^2 = \tfrac{1}{2}D\left[A\sin\left(\omega t + \rho_0\right)\right]^2 = \tfrac{1}{2}DA^2\sin^2\left(\omega t + \rho_0\right)$$

Für die kinetische Energie gilt:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\left[A\omega\cos\left(\omega t + \rho_0\right)\right]^2 = \tfrac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\left(\omega t + \rho_0\right)$$

Vernachlässigt man nun die Reibung, dann muss wegen der Energieerhaltung die Summe aus potentieller und kinetischer Energie zu jedem beliebigen Zeitpunkt konstant sein.
Für die Gesamtenergie gilt:

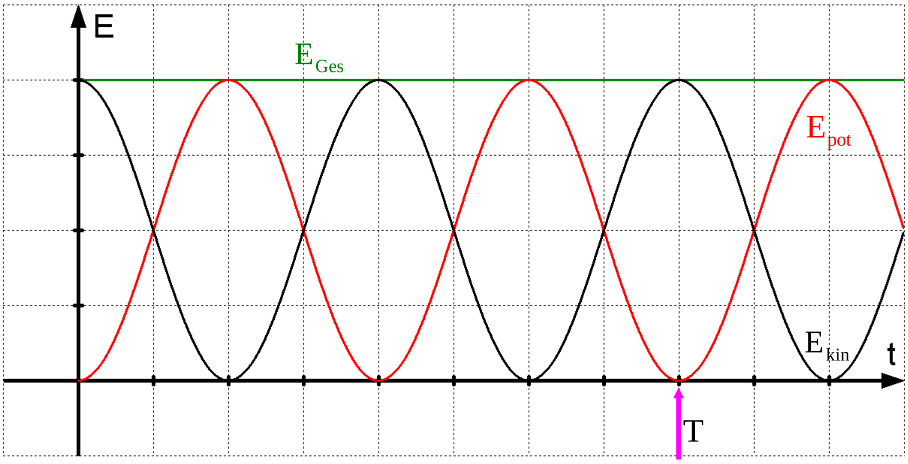
$$E_{Ges} = E_{pot} + E_{kin} = \tfrac{1}{2}DA^2\sin^2\left(\omega t + \rho_0\right) + \tfrac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\left(\omega t + \rho_0\right)$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}} = \sqrt{\frac{D}{m}}$ folgt dann:

$$E_{Ges} = \tfrac{1}{2}DA^2\sin^2\left(\omega t + \rho_0\right) + \tfrac{1}{2}DA^2\cos^2\left(\omega t + \rho_0\right) = \tfrac{1}{2}DA^2\underbrace{\left(\sin^2\left(\omega t + \rho_0\right) + \cos^2\left(\omega t + \rho_0\right)\right)}_{1}$$

$$\boxed{E_{Ges} = \tfrac{1}{2}DA^2}$$

Die graphische Darstellung der Schwingungsenergien in Abhängigkeit von der Zeit t (mit dem Phasenwinkel $\rho_0 = 0$) ist in folgendem Diagramm dargestellt.



An welcher Stelle ist in obigem Diagramm genau eine Periode verstrichen?

Wird die Schwingungsenergie eines harmonisch schwingenden Körpers nicht als Funktion der Zeit, sondern in Abhängigkeit von der Elongation des schwingenden Körpers gesucht. Dann gilt:

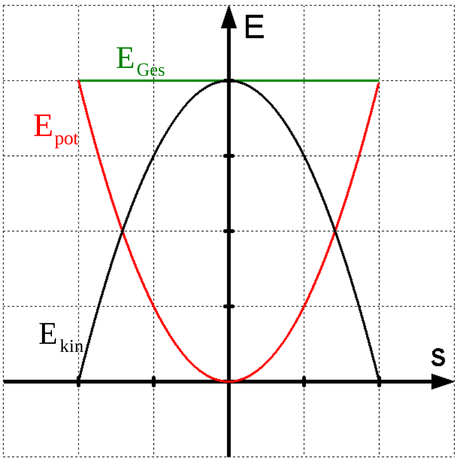
$$E_{Ges} = \tfrac{1}{2} DA^2 = \text{konst.}$$

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2} Ds^2$$

Aus der Energieerhaltung folgt dann:

$$E_{kin} = E_{Ges} - E_{pot} = \tfrac{1}{2} DA^2 - \tfrac{1}{2} Ds^2 = \tfrac{1}{2} D\left(A^2 - s^2\right)$$

Die graphische Darstellung der Schwingungsenergien in Abhängigkeit von der Elongation s ist im rechten Diagramm dargestellt.



Aufgaben:

14.0 Die schwingende Masse eines Federpendels beträgt $m = 430\,g$. Die Amplitude des Pendelkörpers beträgt $A = 8{,}6\,cm$. 10 Schwingungen sind in $11\,s$ vollendet.

14.1 Berechne die Federkonstante!

14.2 Welche Energie wurde dem Pendel zu Beginn zugeführt?

14.3 Gib für die Geschwindigkeit des schwingenden Körpers eine Funktion der Zeit an, wenn zur Zeit $t = 0\,s$ der Körper seine maximale Elongation erreicht!

14.4 Berechne aus der Geschwindigkeit die maximale kinetische Energie!

14.5 Zeige, dass der Energieerhaltungssatz für jeden Zeitpunkt bei dieser harmonischen Schwingung erfüllt ist!

$\left(14\,\tfrac{N}{m};\;\; 5{,}2\cdot 10^{-2}\,J;\;\; v(t) = 0{,}49\,\tfrac{m}{s}\cdot\cos\left(\tfrac{5{,}7}{s}\,t + \tfrac{\pi}{2}\right);\;\; 5{,}2\cdot 10^{-2}\,Nm\right)$

15.0 Ein Körper der Masse $m = 520\,g$ schwingt harmonisch. Die Schwingungsdauer beträgt $T = 1,6\,s$ und die Amplitude $A = 14\,cm$.

15.1 Stelle die Elongation, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Körpers als Funktion der Zeit dar! (Zur Zeit $t = 0\,s$ möge sich der Körper durch die Nulllage in positiver Richtung bewegen)

15.2 Stelle die drei Funktionen graphisch dar und erläutere daran den Begriff der Phasenverschiebung.

15.3 Welche Elongation hat der Körper zur Zeit $t = 0,20\,s$? Wann erreicht er nach $t = 0\,s$ zum erstenmal die Elongation $-10\,cm$?

15.4 Wie groß ist die gesamte Schwingungsenergie des Körpers?

15.5 Wie groß sind die kinetische und die potentielle Energie der Körpers zur Zeit $t = 0,20\,s$?

15.6 Zu welchem Zeitpunkt beträgt die potentielle Energie erstmals $4,5 \cdot 10^{-2}\,J$ (mit Herleitung von t)?

15.7 Wann wird diese Energie zum vierten mal erreicht?

$\left(9,9\,cm;\ 1,0\,s;\ 7,9 \cdot 10^{-2}\,J;\ 3,9 \cdot 10^{-2}\,J; 0,22\,s; 1,4\,s\right)$

16.0 Zwischen zwei Federn, die die gleiche Richtgröße D haben, ist eine Kugel K der Masse m so befestigt, dass sie waagrecht schwingen kann. Die anderen Enden der Federn sind fest. Die Kugel wird um den Betrag A nach links ausgelenkt und zur Zeit $t = 0\,s$ losgelassen. Sie möge jetzt in der positiven x-Richtung schwingen.

16.1 Wie groß ist die potentielle Energie des Systems im Zeitpunkt $t = 0\,s$?

16.2 Mit welcher Geschwindigkeit schwingt die Kugel durch die Nulllage?

16.3 Welche Eigenfrequenz hat das System?

16.4 Stelle das Weg-Zeit-Gesetz der schwingenden Kugel auf!

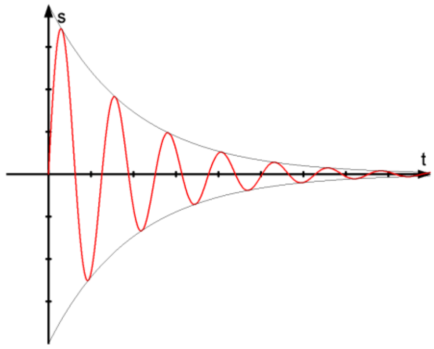
$\left(DA^2;\ A\sqrt{\frac{2D}{m}};\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2D}{m}};\ s(t) = A\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})\right)$

10.15 Freie und erzwungene Schwingungen

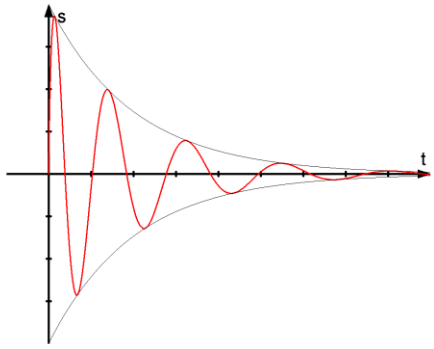
Schwingt eine schwingungsfähiges System nach einer einmaligen Auslenkung ungestört (reibungsfrei), mit unverminderter Amplitude weiter, so spricht man von einer freien Schwingung. Diese besitzt die Eigenfrequenz $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$.

In der Realität wird der frei schwingende Körper durch die unvermeidliche Reibung gedämpft. Seine mechanische Schwingungsenergie nimmt ab, was sich in der Abnahme der Schwingungsamplitude äußert. Je nach Stärke der Dämpfung unterscheidet man drei Fälle:

1.) *Schwingfall.*
Bei schwacher Dämpfung sind viele Schwingungsperioden zu beobachten. Die Periodendauer der schwach gedämpften Schwingung ist konstant und unterscheidet sich nicht von der Periodendauer der zugehörigen ungedämpften Schwingung.



Erhöht man die Dämpfung, so sind nur noch wenige Ausschläge beobachtbar. Die Schwingungsdauer nimmt merklich zu.



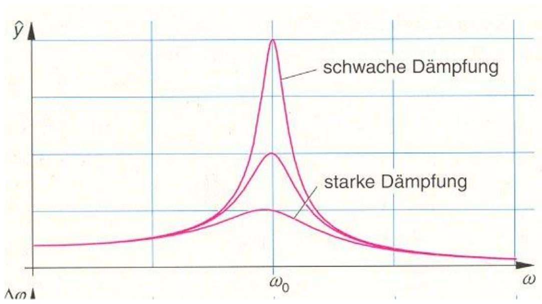
2.) *Aperiodischer Grenzfall:*
Hier ist die Dämpfung so groß, dass der Körper gerade keine ganze Schwingung mehr durchführt. Bei dieser Dämpfung erreicht das schwingungsfähige System seine Ruhelage nach kürzester Zeit wieder. (Wichtig für die Einstelldauer von Messgeräten; Stossdämpfer, ...)

3.) *Kriechfall:*
Bei noch größerer Dämpfung kriecht der Körper in seine Ruhelage zurück.

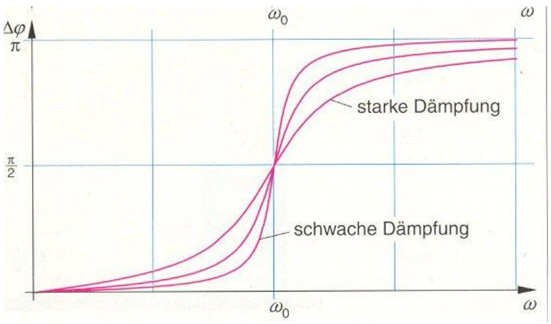
Um nun eine echte harmonische Schwingung über längere Zeit hinweg zu erhalten, muss dem schwingenden System von außen Energie zugeführt werden. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten:
1. Möglichkeit: Steuerung der Energiezufuhr vom schwingenden System aus.
Hierbei wird eine Energiequelle so an das schwingende System gekoppelt, dass sie zu geeigneten Zeiten mit geeigneten Energiebeträgen auf das schwingende System zurückwirkt. Diese Steuerungsart nennt man Rückkopplung, die so aufrecht erhaltene Schwingung, selbsterregte Schwingung. (Klingel, Uhr, ...)
2. Möglichkeit: Steuerung unter Aufzwingung einer Frequenz von außen (**Erzwungene Schwingung**).
Eine äußere Kraft (**Erreger**) wirkt dabei periodisch auf ein System (**Resonator**), das für sich allein in der Lage ist Schwingungen auszuführen.
Wir wollen nun den Einfluss des Erregers auf einen Schwinger untersuchen.

Versuch: Erzwungene Schwingung mit einem Drehpendel

1. <u>Beobachtung</u>: Bei sehr kleinen Erregerfrequenzen f_e bewegt sich der Erreger und der Resonator mit gleicher Amplitude $(A_e \approx A_r)$. Mit zunehmender Erregerfrequenz nimmt die Amplitude des Resonators stetig zu (obwohl $A_e \approx \text{konst.}$) bis zum Erreichen eines Maximums, wobei $A_r \gg A_e$. Erhöht man die Erregerfrequenz weiter, dann nimmt die Resonatoramplitude wieder ab und strebt für sehr hohe Erregerfrequenzen gegen Null.
   Die Resonatoramplitude erreicht dann ihr Maximum, wenn die Erregerfrequenz f_e gleich der Eigenfrequenz f_0 des Resonatorsystems ist. Diesen Fall bezeichnet man als Resonanz.

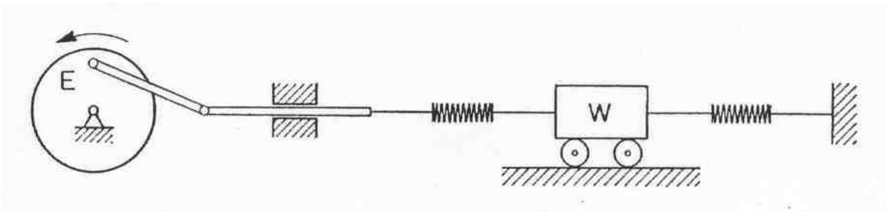


2. <u>Beobachtung</u>: Bei sehr niedrigen Erregerfrequenzen schwingen Erregersystem und Resonatorsystem gleichphasig, der Phasenunterschied $\Delta\rho = 0$.
   Bei sehr hohen Erregerfrequenzen schwingen Erreger und Resonatorsystem gegenphasig, d.h. $\Delta\rho = \pi$.
   Für den Resonanzfall, d.h. wenn $f_e = f_0$ beträgt der Phasenunterschied $\Delta\rho = \frac{\pi}{2}$ (Die Phase des Erregers liegt vor der Phase des Resonators).



Aufgaben

17.0 Mit Hilfe eines Exzenters E, der von einem Elektromotor angetrieben wird, wird der Wagen W zu erzwungenen Schwingungen angeregt.



Eine Kraft von $F = 1,5\,N$ lenkt den Wagen der Masse $m = 200\,g$ um $2,0\,cm$ aus.

17.1 Bei welcher Frequenz tritt Resonanz auf?

17.2 Die Drehzahl wird von 0 aus gesteigert. Beschreibe mit Worten die Bewegung des Wagens (Amplitude und Phase)! Welche Änderung beobachtet man, wenn in einem zweiten Versuch die Masse des Wagens vergrößert wird?