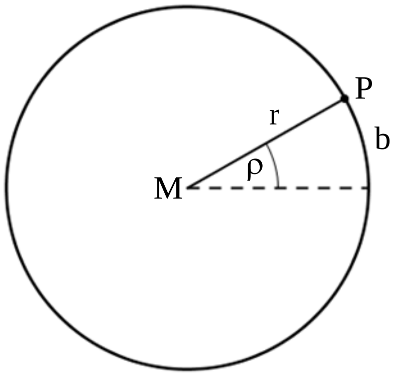
§ 8 Kreisbewegung

Viele Bewegungsabläufe in Umwelt und Technik sind Kreisbewegungen. Ein Volksfestbesucher in einem Kettenkarussell, ein Schlüsselbund der an einer Schnur hängt und im Kreis herumgeschleudert wird, geostationäre Satelliten auf ihrer Bahn um die Erde, ... Bei all diesen Beispielen (und noch vielen mehr) bewegt sich ein Körper auf einer Kreisbahn um einen festen Mittelpunkt.

8.1 Grundlagen zur Kreisbewegung

Durchläuft ein Punkt P gleichförmig immer wieder eine Kreisbahn, so führt er eine periodische Bewegung aus. Die Zeit, die er für einen vollen Umlauf benötigt nennt man die Umlaufdauer (Periodendauer) T.



Beispiele: Geben Sie die Umlaufdauer folgender Kreisbewegungen an:

- Erde bewegt sich um die Sonne
- Monde bewegt sich um die Erde
- Sekundenzeiger, Minutenzeiger, Stundenzeiger einer Uhr.

Den Kehrwert der Umlaufdauer T, nenn man die (Kreis-) Frequenz f:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

$\left[f\right] = \frac{1}{s} = 1\,\text{Hz}$ (Hertz)

Die Frequenz gibt die Anzahl der Umläufe an, die der Körper dabei in einer Sekunde durchführt.

Erweitert man die Frequenzformel mit n $\left(n \in \mathbb{N}\right)$, so erhält man:

$$f = \frac{n}{n \cdot T} = \frac{n}{\Delta t} = \frac{\text{Anzahl n der Umläufe}}{\text{dadurch benötigte Zeit } \Delta t}$$

eine Beziehung, die man verwendet um die Frequenz sich rasch drehender Körper zu ermitteln.

Beispiele: Geben Sie die Frequenz folgender Rotationsbewegungen an:

- Erdrotation
- Sekundenzeiger, Minutenzeiger, Stundenzeiger einer Uhr
- eines Autoreifens, der einen Durchmesser von 60cm hat und mit einer Geschwindigkeit von $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt.

Sind bei einer Kreisbewegung die Umlaufzeit T bzw. die Kreisfrequenz f konstant, so spricht man von einer gleichförmigen Kreisbewegung.
Wollen wir nun mal den Minutenzeiger einer Uhr mit dem Radius $r = 1$ betrachten. Jeder Punkt des Zeigers bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn. Er überstreicht somit in einer bestimmten Zeit Δt immer den gleichen Winkel $\Delta\rho$. Hieraus lässt sich nun (unabhängig vom Radius r des Zeigers) die Winkelgeschwindigkeit ω definieren. Es gilt:

$$\omega = \frac{\Delta\rho}{\Delta t}$$

mit $[\omega] = \frac{1}{s}$

Zu beachten ist hier, dass der Winkel allerdings nicht in Grad, sondern im Bogenmaß angegeben ist. Das ist die Länge des Bogens, der zu einem Kreissektor mit dem Winkel ρ (im Gradmaß) und dem Radius $r = 1$ gehört.

So hat zum Beispiel ein Vollkreis mit dem Winkel $\rho = 360°$ den Winkel $\Delta\rho = 2 \cdot r \cdot \pi \overset{r=1}{=} 2\pi$ im Bogenmaß. Die Umlaufdauer beträgt in diesem Fall $\Delta t = T$. Somit folgt die in der Physik wichtige Beziehung:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

und mit $f = \frac{1}{T}$ dann:

$$\omega = 2\pi f$$

Betrachtet man nun einen Punkt, der sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius r mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt. So folgt nach durchlaufen eines Vollkreises:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot r$$

$$\Rightarrow \quad v = \omega \cdot r$$

Die Bahngeschwindigkeit ist dabei ein Vektor, der stets gleichen Betrag hat, aber ständig seine Richtung ändert. Der Geschwindigkeitsvektor zeigt in jedem Bahnpunkt in Richtung der Tangente senkrecht zum Radiusvektor.

Beispiel:

- Beim Hammerwurf fliegt die Kugel nach dem Loslassen tangential zum Schwungkreis davon.
- Die Funken eines Schleifsteins springen tangential weg.
- Ein Auto welches bei einer Kurvenfahrt die Bodenhaftung verliert, wird tangential zu seiner Bahn aus der „Kurve getragen“.

Aufgaben:

1.0 Die Bahn der Erde um die Sonne kann in guter Näherung als ein Kreis mit dem Radius $1,5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ betrachtet werden.
Jeder Punkt der Erde nimmt an ihrer Rotation um die eigene Achse teil. Der mittlere Erdradius beträgt $6,4\cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$.

1.1 Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der beiden Bewegungen?

Erde um die Sonne:
$$\omega_{E-S} = \frac{2\pi}{365,24\cdot 24\cdot 3600\,\mathrm{s}} = 2,0\cdot 10^{-7}\,\tfrac{1}{\mathrm{s}}$$
Erdrotation:
$$\omega_{E-S} = \frac{2\pi}{24\cdot 3600\,\mathrm{s}} = 7,3\cdot 10^{-5}\,\tfrac{1}{\mathrm{s}}$$

1.2 Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit der Erde?

Erde um die Sonne:
$$v_{E-S} = r_S\cdot\omega_{E-S} = 1,5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}\cdot 2,0\cdot 10^{-7}\,\tfrac{1}{\mathrm{s}} = 3,0\cdot 10^{4}\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
Erdrotation:
$$v_R = r_E\cdot\omega_E = 6,4\cdot 10^{6}\,\mathrm{m}\cdot 7,3\cdot 10^{-5}\,\tfrac{1}{\mathrm{s}} = 4,7\cdot 10^{2}\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

1.3 Welche Bahngeschwindigkeit besitzt München (geografische Breite: 48°) bei der Rotation um die Erdachse?

$$v_R = r_E\cdot\cos\rho\cdot\omega_E = 6,4\cdot 10^{6}\,\mathrm{m}\cdot\cos 48^\circ\cdot 7,3\cdot 10^{-5}\,\tfrac{1}{\mathrm{s}} = 3,1\cdot 10^{2}\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2.0 Die Spurweite eines PKW beträgt $s = 140\,\mathrm{cm}$, der Durchmesser der Räder $d = 60\,\mathrm{cm}$. Der Schwerpunkt des Wagens durchfährt einen Viertelkreis der Länge $\ell = 120\,\mathrm{m}$ mit der Geschwindigkeit $v = 50,0\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

2.1 Welche Zeit benötigt der PKW dazu?

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{\ell}{v} = \frac{120\,\mathrm{m}}{(50:3,6)\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 8,6\,\mathrm{s}$$

2.2 Welchen Weg legen dabei die äußeren und die inneren Räder zurück?

Für den Radius r des Viertelkreises gilt:
$$\ell = \tfrac{1}{4}\cdot 2r\pi \;\Rightarrow\; r = \frac{2\ell}{\pi} = \frac{2\cdot 120\,\mathrm{m}}{\pi} \approx 76,4\,\mathrm{m}$$
Weg der inneren Räder:
$$s_i = \tfrac{1}{4}\cdot 2\cdot\left(r - \tfrac{1}{2}s\right)\cdot\pi = \tfrac{1}{2}\cdot\left(r - \tfrac{1}{2}s\right)\cdot\pi = \tfrac{1}{2}\cdot\left(76,4\,\mathrm{m} - \tfrac{1}{2}\cdot 1,40\,\mathrm{m}\right)\cdot\pi \approx 119\,\mathrm{m}$$
Weg der äußeren Räder:
$$s_a = \tfrac{1}{4}\cdot 2\cdot\left(r + \tfrac{1}{2}s\right)\cdot\pi = \tfrac{1}{2}\cdot\left(r + \tfrac{1}{2}s\right)\cdot\pi = \tfrac{1}{2}\cdot\left(76,4\,\mathrm{m} + \tfrac{1}{2}\cdot 1,40\,\mathrm{m}\right)\cdot\pi \approx 121\,\mathrm{m}$$

2.3 Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit des PKW auf seiner Kreisbahn?

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\cdot\Delta t} = \frac{\pi}{2\cdot\Delta t} = \frac{\pi}{2\cdot 8{,}64\,s} \approx 0{,}182\,\tfrac{1}{s}$$

2.4 Mit welcher Winkelgeschwindigkeit drehen sich die inneren und die äußeren Räder?

3. Bei einer Ultrazentrifuge erreicht ein Teilchen, das sich bei einem Radius von 15cm an der Innenwand des Rotors befindet eine Geschwindigkeit von $1000\,\frac{km}{h}$. Berechnen Sie die Anzahl der Umdrehungen der Zentrifuge pro Minute.

Geg.: $r = 15cm = 0{,}15m \quad v = 1000\,\frac{km}{h} = 277\tfrac{7}{9}\,\frac{m}{s} \quad t = 60s$

Ges.: n

$$v = \omega r = 2\pi f r = 2\pi \tfrac{n}{t} r \quad \Rightarrow n = \frac{vt}{2\pi r} = \frac{277\tfrac{7}{9}\,\tfrac{m}{s}\cdot 60s}{2\cdot\pi\cdot 0{,}15m} \approx 17684 \approx 1{,}8\cdot 10^4$$

Ein Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt ändert permanent die Richtung der Geschwindigkeit. Zerlegt man diese Geschwindigkeit in zwei Komponenten (x- und y-Richtung), dann ändern sich deren Beträge. D.h. man hat eine Beschleunigung in x- und y-Richtung. Setzt man diese Teilbeschleunigungen wieder zusammen, dann erhält man eine Gesamtbeschleunigung, deren Richtung zum Kreismittelpunkt zeigt.
Diese Beschleunigung geht nach dem 3. Newtonschen Gesetz mit einer Kraft einher.
Diese Kraft nennt man Zentripetalkraft und ist zum Kreismittelpunkt hingerichtet.

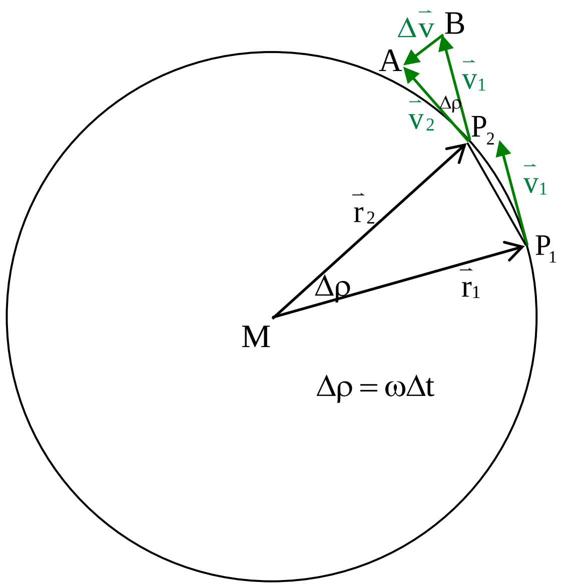
8.2 Herleitung der Zentripetalkraft

<u>Methode 1:</u>

Zur Zeit t_1 befindet sich der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω umlaufende Körper in P_1, zur Zeit t_2 in P_2. Der Ortsvektor $\vec{r}$ hat in der Zeitspanne $\Delta t = t_2 - t_1$ den Winkel $\Delta\rho$ überstrichen. Um die Richtungsänderung der Geschwindigkeit besser zu erkennen ist $\vec{v}_1$ in P_2 noch einmal angetragen. Dabei entsteht das gleichschenklige Dreieck AP_2B, denn es ist $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Der Winkel an der Spitze P_2 ist $\Delta\rho$.

Der Vektor $\overrightarrow{BA} = \Delta\vec{v}$ muss zu $\vec{v}_1$ addiert werden, damit man $\vec{v}_2$ erhält $\left(\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}\right)$;

$\Delta\vec{v}$ gibt demnach die Änderung der Geschwindigkeit in der Zeitspanne Δt an.



Für die mittlere Beschleunigung gilt allgemein:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Die Richtung der Momentanbeschleunigung erhält man aus diesem Ausdruck, wenn man den Grenzwert der mittleren Beschleunigung für $\Delta t \to 0$ betrachtet. Bei diesem Grenzübergang für $\Delta t \to 0$ ändert sich die Richtung des Vektors der Geschwindigkeitsänderung. Dieser Vektor zeigt immer mehr in Richtung des Zentrums der Kreisbewegung.
Diese Erkenntnis macht man z. Bsp. auch beim Hammerwurf.
Ein Hammerwerfer bewegt eine Kugel auf einer Kreisbahn. Er spürt die Muskelkraft, die er aufwenden muss um die Kugel auf der Kreisbahn zu halten.
Diese Kraft, die zum Zentrum der Kreisbewegung hingerichtet ist nennt man Zentripetalkraft $\vec{F}_Z$ (centrum (lat.): Mittelpunkt; petere (lat.): zu erreichen suchen).
Die Richtung der Zentripetalbeschleunigung ist also zum Kreismittelpunkt hingerichtet.
Für den Betrag a_r der Zentripetalbeschleunigung gilt:

$$a_Z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aus der Ähnlichkeit der gleichschenkligen Dreiecke AP_2B und P_2MP_1 folgt:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\overline{P_1P_2}}{r}$$

$$\Delta v = v \cdot \frac{\overline{P_1P_2}}{r} \quad |:\Delta t$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\overline{P_1P_2}}{\Delta t}$$

Ersetzen wir näherungsweise $\overline{P_1P_2}$ durch den Bogen P_1P_2, dann ist $\frac{P_1P_2}{\Delta t}$ die Bahngeschwindigkeit v des Körpers; diese Näherung ist umso besser erfüllt, je kleiner Δt ist.
Deshalb folgt:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

mit $v = r\omega$ folgt für die Zentripetalbeschleunigung:

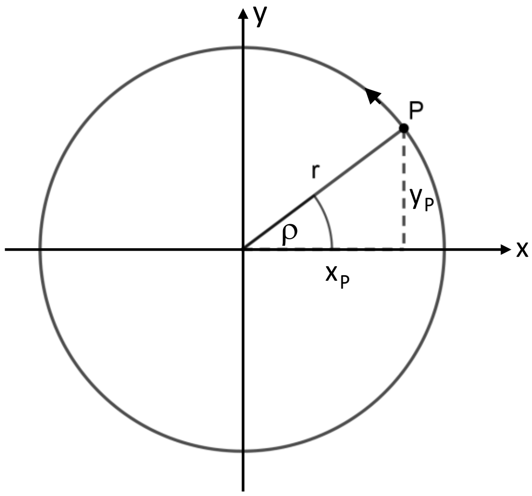
$$a_Z = r\omega^2$$

Wendet man das 2. Gesetz von Newton an, dann erhält man für den Betrag der Zentripetalkraft:

$$F_Z = mr\omega^2$$

Methode 2:

Ein Körper, dargestellt durch den Punkt P, rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn auf einer Kreisbahn mit dem Radius r. Die Position des Punktes P kann dabei in Abhängigkeit des Winkels ρ im eingezeichneten Koordinatensystem folgendermaßen angegeben werden:



$$\left.\begin{array}{l} \cos\rho = \dfrac{x_P}{r} \;\Rightarrow\; x_P = r\cdot\cos\rho \\ \sin\rho = \dfrac{y_P}{r} \;\Rightarrow\; y_P = r\cdot\sin\rho \end{array}\right\} \Rightarrow\; P\left(r\cdot\cos\rho \,|\, r\cdot\sin\rho\right)$$

Für den Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ gilt dann: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\rho) \\ r\cdot\sin(\rho) \end{pmatrix}$

Mit $\rho = \omega\cdot t$ folgt: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\omega\cdot t) \\ r\cdot\sin(\omega\cdot t) \end{pmatrix}$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist die 1. Ableitung von $\vec{r}$: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -r\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t) \\ r\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) \end{pmatrix}$

Für den Betrag der Geschwindigkeit gilt:

$$v = \left|\vec{v}\right|$$
$$v = \sqrt{\left(-r\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)\right)^2 + \left(r\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\right)^2}$$
$$v = \sqrt{r^2\cdot\omega^2\cdot\sin^2(\omega\cdot t) + r^2\cdot\omega^2\cdot\cos^2(\omega\cdot t)}$$
$$v = \sqrt{r^2\cdot\omega^2\cdot\left(\sin^2(\omega\cdot t) + \cos^2(\omega\cdot t)\right)}$$
$$v = \sqrt{r^2\cdot\omega^2\cdot 1}$$
$$v = r\cdot\omega$$

Die Beschleunigung $\vec{a}$ ist die 2. Ableitung von $\vec{r}$:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -r\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t) \\ -r\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t) \end{pmatrix} = -\omega^2\cdot\begin{pmatrix} r\cdot\cos(\omega\cdot t) \\ r\cdot\sin(\omega\cdot t) \end{pmatrix} = -\omega^2\cdot\vec{r}$$

Das zeigt sehr schön, dass die Beschleunigung entgegen den Vektor $\vec{r}$ gerichtet ist und somit stets zum Kreismittelpunkt hin zeigt.

Für den Betrag der Beschleunigung gilt:

$$a = |\vec{a}|$$

$$a = \sqrt{\left(-r\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t)\right)^2 + \left(-r\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)\right)^2}$$

$$a = \sqrt{r^2\cdot\omega^4\cdot\cos^2(\omega\cdot t) + r^2\cdot\omega^4\cdot\sin^2(\omega\cdot t)}$$

$$a = \sqrt{r^2\cdot\omega^4\cdot\left(\cos^2(\omega\cdot t) + \sin^2(\omega\cdot t)\right)}$$

$$a = \sqrt{r^2\cdot\omega^4\cdot 1}$$

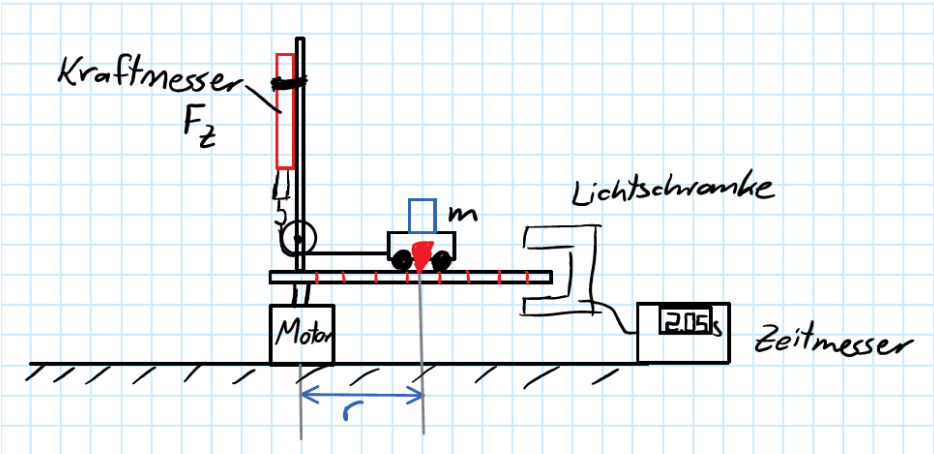
$$a = r\cdot\omega^2$$

Wendet man das 2. Gesetz von Newton an, dann erhält man für den Betrag der Zentripetalkraft:

$$F_Z = mr\omega^2$$

Methode 3: (Experimentell)
Die Abhängigkeit der Zentripetalkraft von der Masse m, der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Radius r wollen wir nun experimentell untersuchen.
Dazu untersuchen wir die Abhängigkeit der Zentripetalkraft F_Z von jeweils einer der drei Größen, die beiden anderen Größen werden dabei immer konstant gehalten.

Versuchsaufbau:



Versuchsbeschreibung:
Auf einer drehbaren Schiene befindet sich im Abstand r von der Drehachse ein Wagen der Masse m. Die Schiene wird von einem Motor in Drehbewegung versetzt und die Umlaufdauer T für eine volle Kreisdrehung mithilfe einer Lichtschranke und einem Zeitmesser ermittelt.
An dem Kraftmesser kann die auf den Wagen wirkende Zentripetalkraft abgelesen werden.

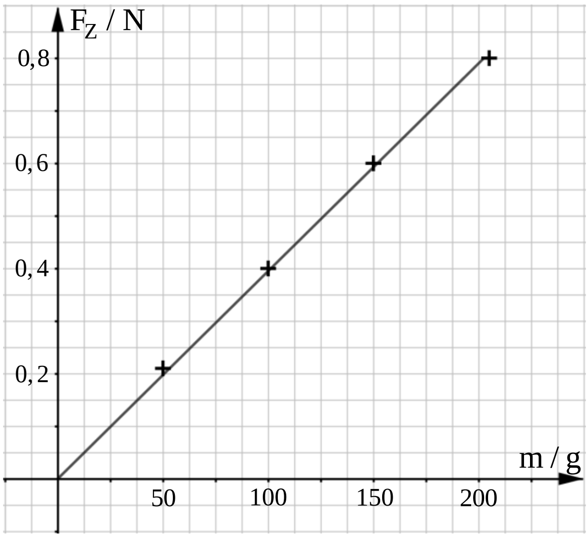
Versuchsreihe 1:
Die Winkelgeschwindigkeit ω und der Radius r (Abstand des Wagens zum Kreismittelpunkt) werden konstant gehalten.

$r = 0,20\,m$

$T = 1,41\,s \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,41\,s} = 4,46\,\frac{1}{s}$

m in g	50	100	150	200
F_Z in N	0,21	0,40	0,60	0,82

Graphische Auswertung der Versuchsreihe → $m - F_Z$ – Diagramm



Im Rahmen der Mess- und Zeichengenauigkeit liegen die Messwerte auf einer Ursprungshalbgeraden

$\Rightarrow \quad F_Z \sim m \quad (1)$

Versuchsreihe 2:
Die Winkelgeschwindigkeit ω und die Masse m werden konstant gehalten.

$m = 100\,g$

$T = 1,44\,s \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,44\,s} = 4,36\,\frac{1}{s}$

r in m	0,1	0,15	0,2	0,25
F_Z in N	0,21	0,33	0,43	0,50
$\frac{F_Z}{r}$ in $\frac{N}{m}$	2,1	2,2	2,2	2,0

Rechnerische Auswertung der Versuchsreihe:

Im Rahmen der Messgenauigkeit gilt $\frac{F_Z}{r} \approx \text{konst.}$

$$\Rightarrow \quad F_Z \sim r \quad (2)$$

Versuchsreihe 3:
Der Radius r und die Masse m werden konstant gehalten.

$m = 100\,\text{g}$

$r = 0{,}2\,\text{m}$

T in s	1,80	1,41	1,15	0,93
ω in $\frac{1}{s}$	3,49	4,46	5,46	6,76
F_Z in N	0,22	0,40	0,63	0,86
ω^2 in $\frac{1}{s^2}$	12,2	19,9	29,8	45,7
$\frac{F_Z}{\omega^2}$ in $\frac{N}{s^2}$	0,018	0,020	0,021	0,019

Rechnerische Auswertung der Versuchsreihe.

Im Rahmen der Messgenauigkeit gilt $\frac{F_Z}{\omega^2} \approx \text{konst.}$

$$\Rightarrow \quad F_Z \sim \omega^2 \quad (3)$$

Zusammenfassung:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & F_Z \sim m \\ (2) & F_Z \sim r \\ (3) & F_Z \sim \omega^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F_Z \sim m \cdot r \cdot \omega^2$$

Und mit einer Konstanten k folgt: $F_Z = k \cdot m \cdot r \cdot \omega^2$
Die Konstante k lässt sich mit Hilfe der Messwerte aus Versuchsreihe 3 berechnen:

$$k = \frac{F_Z}{m \cdot r \cdot \omega^2} = \frac{0{,}40\,\text{N}}{0{,}100\,\text{kg} \cdot 0{,}20\,\text{m} \cdot \left(4{,}46\,\frac{1}{s}\right)^2} \approx 1{,}0$$

Somit folgt für die Zentripetalkraft F_Z: $\quad F_Z = m \cdot r \cdot \omega^2$

Und mit Hilfe der Gleichung $v = \omega \cdot r \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{r}$ folgt noch nach einer kleinen Umformung:

$$F_Z = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot r \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = m \cdot r \cdot \frac{v^2}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Also: $F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r}$

4. Eine Wäscheschleuder (Durchmesser 0,60 m) dreht sich 40 mal in einer Sekunde. Welche Zentripetalkraft müsste ein Wasserteilchen der Masse 1,0 g am Rand festhalten, damit es nicht wegfliegt?

   $F = 4\pi^2 m f^2 r = ... \approx 19\text{N}$

5. Ein Körper der Masse 1,0 kg wird an einer 40 cm langen Schnur auf einem vertikalen Kreis herumgeschleudert. Welche Kraft wird auf die Schnur im höchsten und tiefsten Punkt der Bahn ausgeübt, wenn dort die Bahngeschwindigkeit jeweils den Betrag $2{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ besitzt?

   $F_o = 0{,}19\text{N}$
   $F_u = 20\text{N}$

6. Der Mensch übersteht höchstens Beschleunigungen der neunfachen Fallbeschleunigung. Wie groß muss der Radius einer horizontal liegenden Kurve mindestens sein, die ein Flugzeug mit der Geschwindigkeit $1{,}5 \cdot 10^3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beschreibt?

   $r \approx 2{,}0\text{km}$

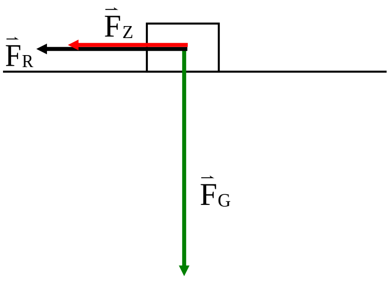
Damit sich ein Körper auf einer Kreisbahn bewegt, muss auf ihn eine konstante Zentripetalkraft wirken. Schleudern wir selbst einen Körper herum, so empfinden wir einen Zug nach außen, dem wir durch die Zentripetalkraft das Gleichgewicht halten müssen, damit der Körper auf der Kreisbahn bleibt.
Die beiden verschiedenen Darstellungen des gleichen Sachverhalts können miteinander in Einklang gebracht werden, wenn man sich vorstellt, dass sie für zwei verschiedene Bezugssysteme gelten.
Die erste Darstellung beschreibt den Vorgang in dem Bezugssystem, in dem der Körper die Kreisbahn beschreibt, die zweite in einem mit gleicher Achse und Frequenz mitrotierenden Bezugssystem, in dem der Körper in Ruhe ist. Im rotierenden Bezugssystem ist die Kraft radial nach außen gerichtet, deshalb nennt man sie **Zentrifugalkraft**. Sie greift an dem Körper an und dieser beschreibt einen Kreis, wenn die Zentrifugalkraft und die Zentripetalkraft gleich sind.
Die Zentrifugalkraft ist eine Trägheitskraft, die im beschleunigten Bezugssystem auftritt.
Immer wenn man die Zentrifugalkraft empfindet oder sie in seine Überlegungen einbezieht, begibt man sich in das rotierende Bezugssystem. Das ist zur physikalischen Beschreibung der Vorgänge bei der Kreisbewegung an sich nicht notwendig (Man könnte ausschließlich das

Bezugssystem benutzen, in dem der Körper rotiert). Es gibt jedoch Vorgänge, die leichter im mitrotierenden Bezugssystem beschrieben werden können!

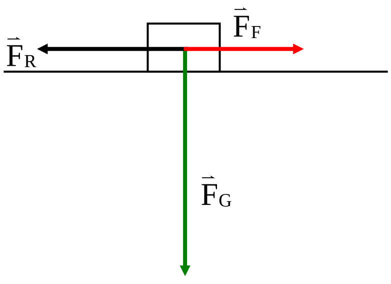
8.3 Anwendungen

8.3.1 Durchfahren einer nicht überhöhten Kurve

Im ruhenden Bezugsystem gilt :



Im mitbewegten Bezugsystem gilt :



Zum problemlosen Durchfahren einer Kurve muss die Reibungskraft größer oder gleich der für die Kurvenfahrt nötigen Zentripetalkraft sein.

$$F_R \geq F_Z$$

$$\mu mg \geq m\frac{v^2}{r}$$

$$\boxed{\mu \geq \frac{v^2}{rg}}$$

7.0 Ein Kraftwagen fährt mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in eine nicht überhöhte Kurve mit dem Krümmungsradius $r = 30\text{m}$.

7.1 Bei welcher Reibungszahl rutscht der Wagen gerade noch nicht weg?

$\mu = 0{,}66$

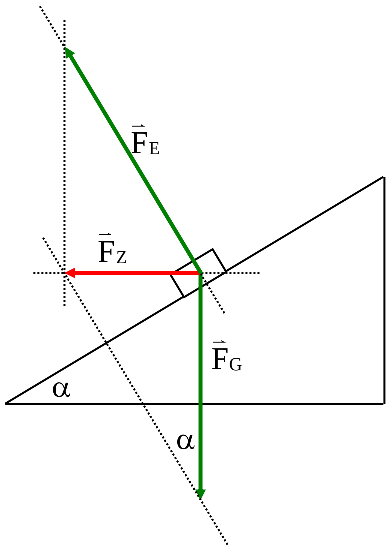
7.2 Mit welcher Höchstgeschwindigkeit darf der Wagen bei einer Reibungszahl von 0,25 die Kurve durchfahren?

$v \approx 8{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 31\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

8.3.2 Kurvenfahrt mit Kurvenüberhöhung

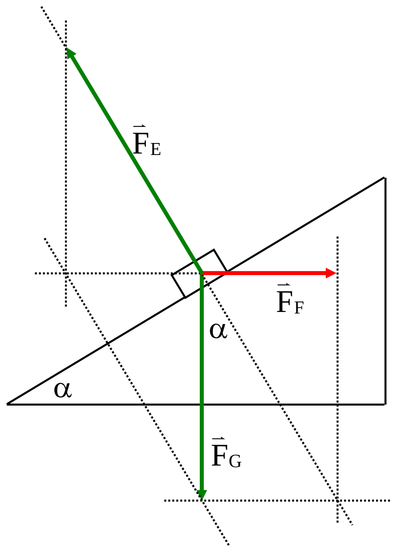
Das Durchfahren einer Kurve ist am sichersten, wenn eine Kurvenüberhöhung dafür sorgt, dass keine seitliche Belastung der Räder auftritt. D. h. also, dass das Fahrzeug senkrecht auf die Fahrbahn gedrückt wird. Diese Kraft wird durch die elastische Kraft der Straße kompensiert.

Im ruhenden Bezugssystem gilt:



$$\vec{F}_Z = \vec{F}_G + \vec{F}_E$$

Im mitbewegten Bezugssystem gilt:



$$\vec{F}_G + \vec{F}_E + \vec{F}_F = \vec{0}$$

Für den entsprechenden Kurvenüberhöhungswinkel α gilt dann:

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{v^2}{rg}}$$

Für jeden Kurvenradius r und zu jeder Geschwindigkeit v gibt es eine optimale Kurvenüberhöhung, die eine optimale Straßenlage garantiert.

Oder anders ausgedrückt: Zu jeder überhöhten Kurve gibt es eine ideale Geschwindigkeit v_{ideal} für die gilt:

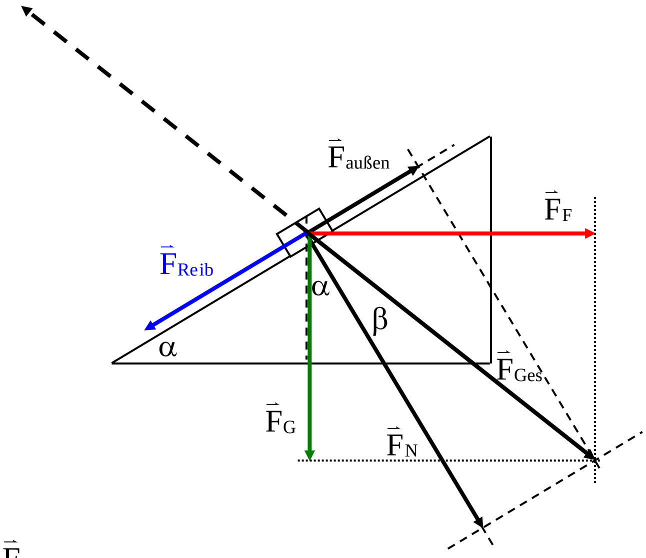
$$v_{ideal} = \sqrt{g \cdot r \cdot \tan\alpha}$$

Bei größerer Geschwindigkeit muss eine Haftkraft zwischen Reifen und Straße verhindern, dass das Fahrzeug nach außen, bei kleinerer Geschwindigkeit nach innen rutscht.

Für den Betrag der elastischen Kraft $\vec{F}_E$ gilt:

$$F_E^2 = F_G^2 + F_Z^2 \quad \Rightarrow \quad F_E = \sqrt{m^2 g^2 + m^2 \cdot \frac{v^4}{r^2}} = m \cdot g \cdot \sqrt{1 + \frac{v^4}{r^2 \cdot g^2}} = F_G \cdot \sqrt{1 + \frac{v^4}{r^2 \cdot g^2}}$$

Betrachtung für $v > v_{ideal}$ (im mitbewegten Bezugssystem)



1. $\vec{F}_{Ges} = \vec{F}_G + \vec{F}_F$
2. $\vec{F}_{Ges}$ zerlegen in $\vec{F}_N$ und $\vec{F}_{außen}$
3. Für die Kurvenfahrt muss gelten: $F_{Reib} > F_{außen}$

8.0 Ein Wagen auf der Achterbahn durchfährt eine horizontale Kurve von 2,5 m Krümmungsradius mit der Geschwindigkeit $2{,}5\,\frac{m}{s}$.

8.1 Welche Neigung gegenüber der Horizontalen sollte die Bahn haben, wenn kein seitlicher Druck auf die Schienen ausgeübt werden soll?

$\alpha = 14°$

8.2 Berechne den Betrag der auftretenden Zentripetalbeschleunigung.
$a_Z = 2{,}5\,\frac{m}{s^2}$

9.0 Eine Lokomotive der Masse 100 t durchfährt eine Kurve $(\text{Radius } 500\,m)$ mit einer Geschwindigkeit von $80\,\frac{km}{h}$.

9.1 Welche Zentripetalkraft müssten die Schienen aufbringen, wenn die Kurve nicht überhöht wäre?

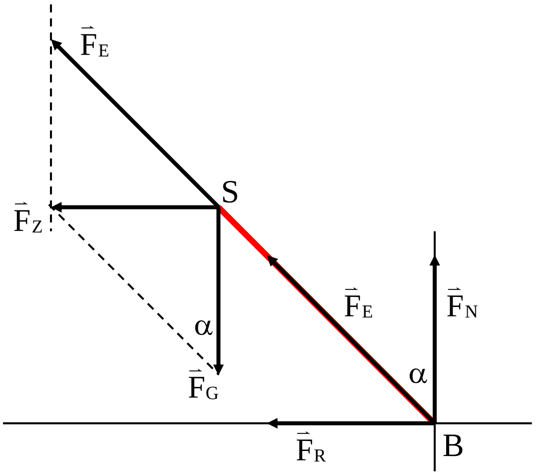
$F_Z = 99\,kN$

9.2 Berechne den richtigen Kurvenüberhöhungswinkel.

$\alpha = 5{,}7°$

8.3.3 Kurve ohne Kurvenüberhöhung mit dem Zweirad

Fährt ein Motorradfahrer in eine Kurve, so muss er sich soweit neigen, dass die Gewichtskraft die horizontal gerichtete Zentripetalkraft liefert.



Aus der Zeichnung entnimmt man:

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan\alpha = \frac{v^2}{rg}}$$

Außerdem gilt:

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{F_R}{F_N} = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\cdot\frac{v^2}{r}}{m\cdot g} = \frac{v^2}{r\cdot g}$$

10.0 Bei einer gefährlichen Kurve $(r = 25\text{m})$ ist die Höchstgeschwindigkeit durch Verkehrsschilder auf $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ begrenzt. Die Gesamtmasse von Motorrad und Fahrer ist 220 kg.

10.1 Welchen Neigungswinkel muss der Fahrer einhalten um bei der zugelassenen Höchstgeschwindigkeit die Kurve zu durchfahren?

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg} = \ldots \quad \Rightarrow \quad \alpha = 27°$$

10.2 Wie groß muss die seitliche Haftkraft sein, damit der Fahrer nicht nach außen rutscht?

$$F_S = F_Z = \frac{mv^2}{r} = \ldots = 1{,}1\,\text{kN}$$

10.3 Ein Fahrer missachtet die Geschwindigkeitsbeschränkung und fährt mit $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in die Kurve. Welchen Neigungswinkel müsste er einhalten? Wie groß müsste die seitliche Haftkraft sein, damit er die Kurve durchfahren kann?

$$\alpha = 58°$$

Die Fußrasten würden bei diesem Winkel schon lange den Boden berühren!

$$F_S = F_Z = \frac{mv^2}{r} = ... = 3{,}5\ \mathrm{kN}$$

10.4 Wie verläuft die Fahrt, wenn sich der Motorradfahrer weniger neigt, als es bei seiner Geschwindigkeit nötig wäre?
Er kann den Radius von 25m nicht halten. Bei einer Linkskurve verlässt er die Fahrbahn; bei einer Rechtskurve kommt er auf die Gegenfahrbahn.

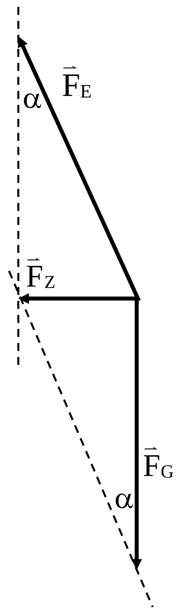
10.5 Erläutere die Gefahr, wenn in der Kurve plötzlich vor dem Fahrer etwas Kies oder ein Ölfleck auftaucht.
Die obere Grenze der seitlichen Haftkraft ist durch Kies oder Öl erheblich kleiner; das Motorrad rutscht schon bei kleineren Neigungswinkel nach außen weg.

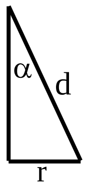
11. Um welchen Winkel hat sich ein Radfahrer in der Kurve nach innen zu legen, wenn er mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $4{,}0\,\frac{m}{s}$ eine Kurve von $8{,}4\mathrm{m}$ Krümmungsradius durchfahren will?

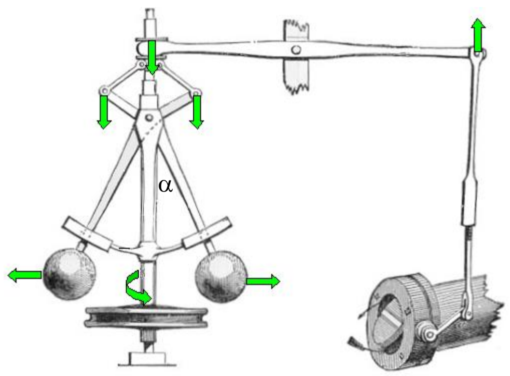
$$\tan\alpha = \frac{v^2}{rg};\ \ \alpha \approx 11°$$

8.3.4 Drehfrequenzregler (Fliehkraftregler):

Zur Steuerung der Drehzahl von Dampfmaschinen verwendet man sogenannte Drehfrequenzregler. Versetzt man diesen in Rotation, so werden die beiden Kugeln angehoben. Es gilt:







$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\omega^2 r}{mg}$$

$\omega = 2\pi f$

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$\tan\alpha = \frac{4\pi^2 \cdot f^2 \cdot r}{g}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \tan\alpha}{r}} \quad \text{bzw.} \quad f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot \tan\alpha}{r}}$$

Durch die Drehung des Fliehkraftreglers werden die beiden kugelförmigen Gewichte aus Gusseisen immer weiter gegen die Schwerkraft nach außen gezogen. Über einen Gelenk- und Hebelmechanismus wird in der Dampfleitung der Maschine eine Drosselklappe betätigt, welche die weitere Zufuhr des Dampfes zur Maschine verkleinert. Die Maschine läuft daraufhin langsamer, so dass sich die Drosselklappe wieder öffnet.
Diese Anordnung ist ein Musterbeispiel für einen Regelkreis mit negativer Rückkopplung.
Die Drehfrequenz der Dampfturbine lässt sich so konstant halten.

Aus $\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \tan\alpha}{r}} = \sqrt{\frac{g \cdot \sin\alpha}{r \cdot \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{g \cdot r}{r \cdot d \cdot \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{g}{d \cdot \cos\alpha}}$ da $\sin\alpha = \frac{r}{d}$

Die kleinstmögliche Winkelgeschwindigkeit ist durch $\alpha \approx 0$ charakterisiert, d.h. $\cos\alpha \approx 1$. Somit folgt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{d}} \quad \text{bzw.} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{d}}$$

12.0 Bei einem Kettenkarussell befinden sich die Aufhängehaken für die Ketten in einem horizontalen Abstand von $3{,}0\,\text{m}$ von der Rotationsachse. Die Länge jeder Kette (Aufhängepunkt – Schwerpunkt des Fahrgasts) beträgt 5,5m. Bei der Kreisbewegung des Karussells werden die Ketten um 25° aus der Vertikalen ausgelenkt. Ein Fahrgast hat die Masse 80kg.

12.1 Fertige eine Skizze mit Kräfteplan aus der Sicht eines ruhenden Beobachters an.

12.2 Wie groß sind die Winkel und Bahngeschwindigkeit der Fahrgäste? In welcher Zeit macht das Karussell eine volle Umdrehung?

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

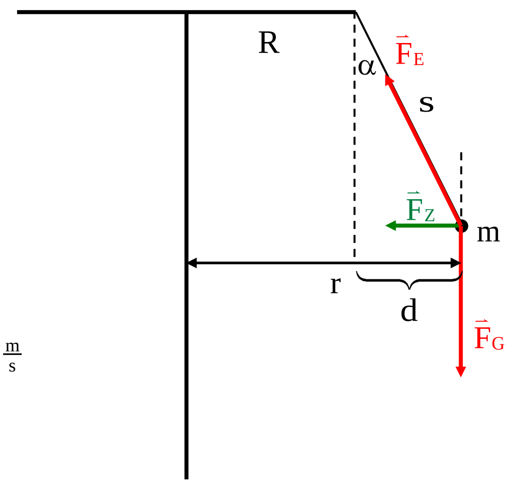
$$\omega^2 = \frac{g \cdot \tan\alpha}{r} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g \cdot \tan\alpha}{r}}$$

$$r = R + d = R + s \cdot \sin\alpha$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \tan\alpha}{R + s \cdot \sin\alpha}} = \ldots = 0{,}93\,\tfrac{1}{s}$$

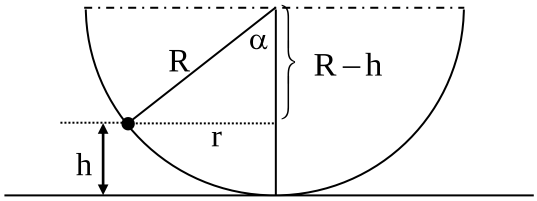
$$\omega = \frac{v}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \omega \cdot r = \omega \cdot (R + s \cdot \sin\alpha) = \ldots = 4{,}93\,\tfrac{m}{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \ldots = 6{,}8\,\text{s}$$



13.1 Wie hoch steigt eine Kugel in einer halbkreisförmig gebogenen Rinne, die sich in der Minute 180 mal um die vertikale Achse dreht? (Allgemeine Herleitung!)

13.2 Wie groß ist die von der Kugel auf die Rinne ausgeübte Kraft, wenn der Radius $R = 15\text{cm}$ beträgt und die Kugel die Masse von 100g besitzt?



zu 13.1:

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$\tan\alpha = \frac{r}{R-h} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$R - h = \frac{g}{\omega^2}$$

$$h = R - \frac{g}{\omega^2}$$

zu 13.2:

$$\sin\alpha = \frac{F_Z}{F_E} \quad \Rightarrow F_{Rinne} = F_E = \frac{F_Z}{\sin\alpha} = \frac{m\omega^2 r}{\sin\alpha} = \frac{m\omega^2 r}{\frac{r}{R}} = m\omega^2 R \quad \text{mit } \sin\alpha = \frac{r}{R}$$

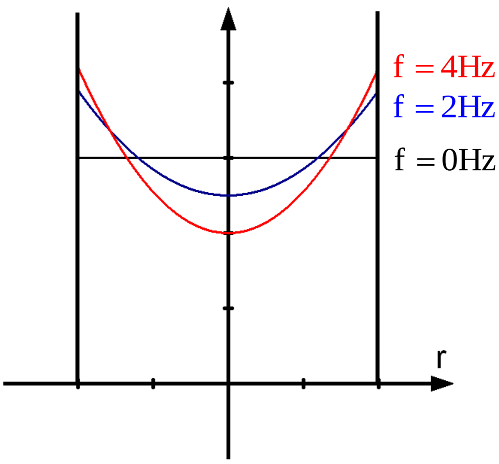
$$F = m\omega^2 R = m\left(2\pi\tfrac{n}{t}\right)^2 r = 4\pi^2 m\left(\tfrac{n}{t}\right)^2 r = 0{,}1\text{kg}\cdot 4\pi^2\left(\tfrac{180}{60\text{s}}\right)^2 \cdot 0{,}15\text{m} \approx 5{,}3\text{N}$$

14.0 In einem zylindrischen Gefäß mit dem Radius R befindet sich eine Flüssigkeit. Das Gefäß rotiert mit 240 Umdrehungen in der Minute um die Zylinderachse.

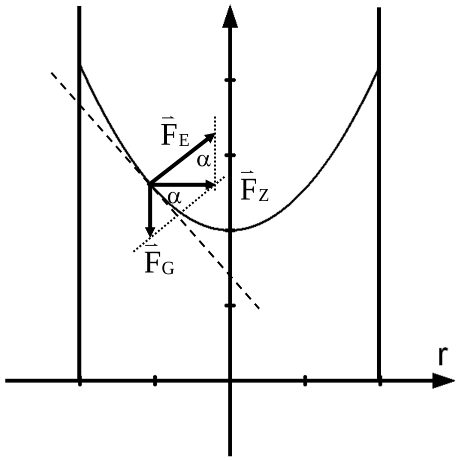
14.1 Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω_0 dreht sich das Gefäß?
Skizziere qualitativ die Flüssigkeitsoberfläche bei den Umdrehungszahlen 0; 120 und 240, wobei angenommen wird, dass die Flüssigkeit schon längere Zeit rotiert.

$$f = \frac{n}{t} = \frac{240}{60\,\text{s}} = 4{,}00\text{Hz}$$

$$\omega_0 = 2\pi f = 2\pi\cdot 4{,}00\text{Hz} = 25{,}1\tfrac{1}{\text{s}}$$



14.2 Fertige für ein Oberflächenteilchen, das sich Abstand $0 < r < R$ von der Drehachse befindet, einen Kräfteplan aus Sicht eines ruhenden Beobachters an.



14.3 Die Flüssigkeitsoberfläche schließt im Abstand $r = 3,0\,\text{cm}$ von der Drehachse bei der Winkelgeschwindigkeit ω_0 mit der Horizontalen den Winkel α ein. Berechne diesen Winkel.

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{(2\pi \cdot 4\text{Hz})^2 \cdot 0,03\text{m}}{9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 1,932 \quad \Rightarrow \alpha \approx 62,6°$$

14.4 Leite allgemein eine Beziehung her, welche die Abhängigkeit des Winkels α von der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Abstand r des Teilchens von der Drehachse angibt.

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

Es gilt: $f'(r) = m = \tan\alpha = \frac{\omega^2}{g} r \quad \Rightarrow f(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + c, \quad c > 0$

Die Wasseroberfläche beschreibt somit eine Parabel, deren Öffnung durch den Faktor $\frac{\omega^2}{2g}$ gegeben ist; c ist eine additive Konstante; c ist umso kleiner je größer ω ist.

Zur Bestimmung der Konstanten c geht man davon aus, dass sich die Gesamtfläche unter der Parabel nicht ändert.

Rotiert der Zylinder nicht, so hat man die Fläche $A = 2RH$ mit der Höhe H.

Rotiert der Zylinder, so muss dann gelten:

$$A = \int_{-R}^{R} f(r)\,dr = \int_{-R}^{R} \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 + c\right) dr = \left[\frac{\omega^2}{6g} r^3 + cr\right]_{-R}^{R} = ... = \frac{\omega^2}{3g} R^3 + 2cR = 2RH$$

Löst man nach c auf, so folgt:

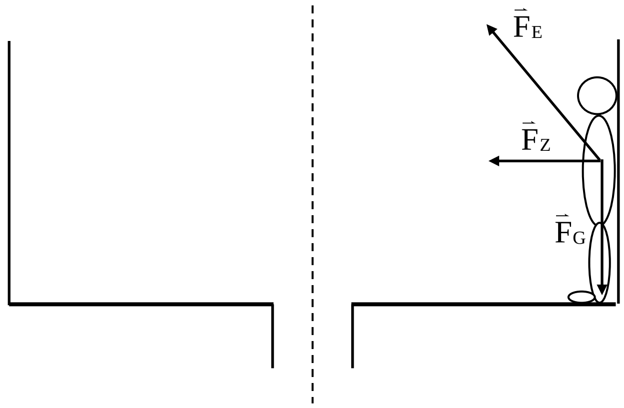
$$c = H - \frac{\omega^2}{6g} R^2$$

Man erhält nun: $f(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + H - \frac{\omega^2}{6g} R^2$

14.5 Bei festem r ist α eine Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω. Berechne für $r = 3{,}0\,\text{cm}$ den Winkel α bei verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten zwischen $0\,\frac{1}{s}$ und $60\,\frac{1}{s}$ und zeichne den Graphen dieser Funktion.

ω in $\frac{1}{s}$	0	10	20	30	40	50	60
α in °	0	17	50,7	70	78,4	82,5	84,8

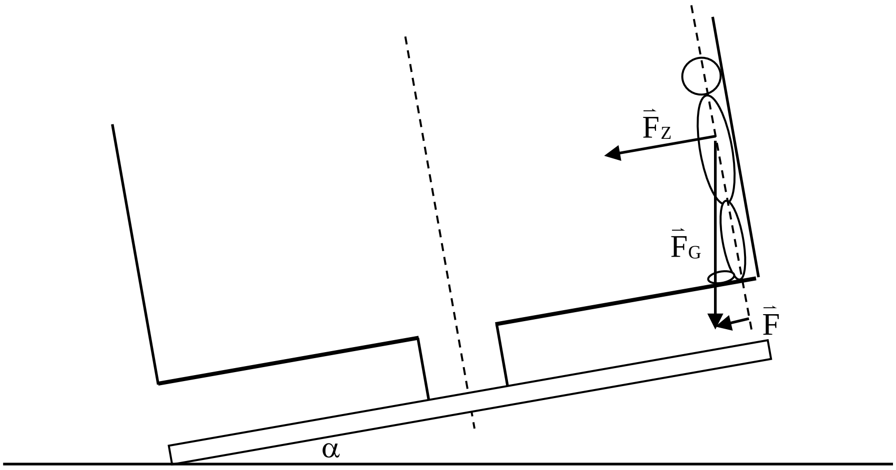
15.0 Gegeben ist ein Rotor auf einem Volksfest, der den Durchmesser d besitzt.
15.1 Fertigen einen beschrifteten Kräfteplan aus der Sicht eines ruhenden Beobachters an.



15.2 Nun soll im Rotor der Boden abgesenkt werden, ohne dass ein Körper der Masse m von der Wand abgleitet. Welche Geschwindigkeit (Betrag) muss die Wand besitzen, wenn die Reibungszahl μ vorgegeben ist.

$$F_R = \mu \cdot F_N$$
$$F_G = \mu \cdot F_Z$$
$$mg = \mu \cdot m \cdot \frac{v^2}{r}$$
$$v = \sqrt{\frac{r \cdot g}{\mu}} = \sqrt{\frac{d \cdot g}{2 \cdot \mu}}$$

15.3 Durch eine hydraulische Vorrichtung wird der Rotor um den Winkel α gegen die Horizontale geneigt. Wie groß ist die Kraft, mit der die Wand eine Person der Masse m im höchsten Punkt A bzw. im tiefsten Punkt B der Bahn in die Kreisbahn zwingt, wenn der sich der Rotor in a Sekunden b mal dreht?



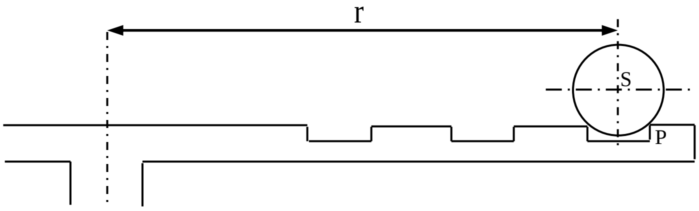
$$\sin\alpha = \frac{F}{F_G} \quad \Rightarrow F = F_G \sin\alpha$$

$$F_A = F_Z - F = mr\omega^2 - mg\sin\alpha = m\left(\tfrac{d}{2}4\pi^2 f^2 - g\sin\alpha\right) = m\left(\frac{2\pi^2 b^2 d}{a^2} - g\sin\alpha\right)$$

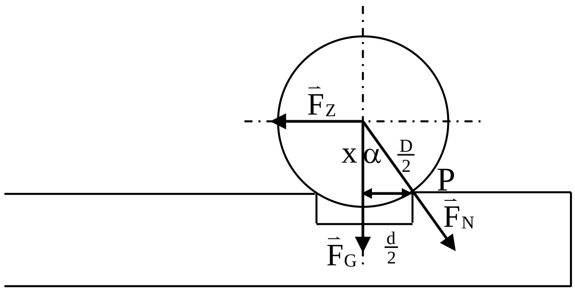
$$F_B = F_Z + F = mr\omega^2 + mg\sin\alpha = m\left(\tfrac{d}{2}4\pi^2 f^2 + g\sin\alpha\right) = m\left(\frac{2\pi^2 b^2 d}{a^2} + g\sin\alpha\right)$$

$v_A = \sqrt{\tfrac{1}{2}dg\left(\mu + \sin\alpha\right)}$ Geschwindigkeit im höchsten Punkt, damit der Körper von der Wand nicht abgleitet (mit Reibung).

16.0 Eine Kreisscheibe ist um eine zu ihr senkrechte, vertikale Achse drehbar. In der Kreisscheibe befinden sich mehrere Bohrungen vom Durchmesser 3,00 cm. Auf einer Bohrung liegt eine Metallkugel mit dem Durchmesser 5,00 cm und der Masse 0,500 kg. Ihr Schwerpunkt S hat von der Drehachse der Scheibe den Abstand r. Die Scheibe wird in Drehung versetzt und die Winkelgeschwindigkeit von $0\,\frac{1}{s}$ an langsam erhöht.



16.1 Bestimmen Sie für die angegebene Anordnung die Winkelgeschwindigkeit $\omega_{max}(r)$, bei der die Kugel gerade noch in der Bohrung liegen bleibt, in Abhängigkeit von r. Fertigen Sie dazu eine Zeichnung im Maßstab 1:1 mit allen im Punkt S angreifenden Kräften an $(1{,}0\,N \hat{=} 1{,}0\,cm)$.



Die Kraft $\vec{F}_N$ muss durch P verlaufen!

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g} \qquad (1)$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{x} \qquad \left(\tfrac{D}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\tfrac{d}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; x = \tfrac{1}{2}\sqrt{D^2 - d^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{d}{\sqrt{D^2 - d^2}} \qquad (2)$$

Gleichsetzen: $(1) = (2)$

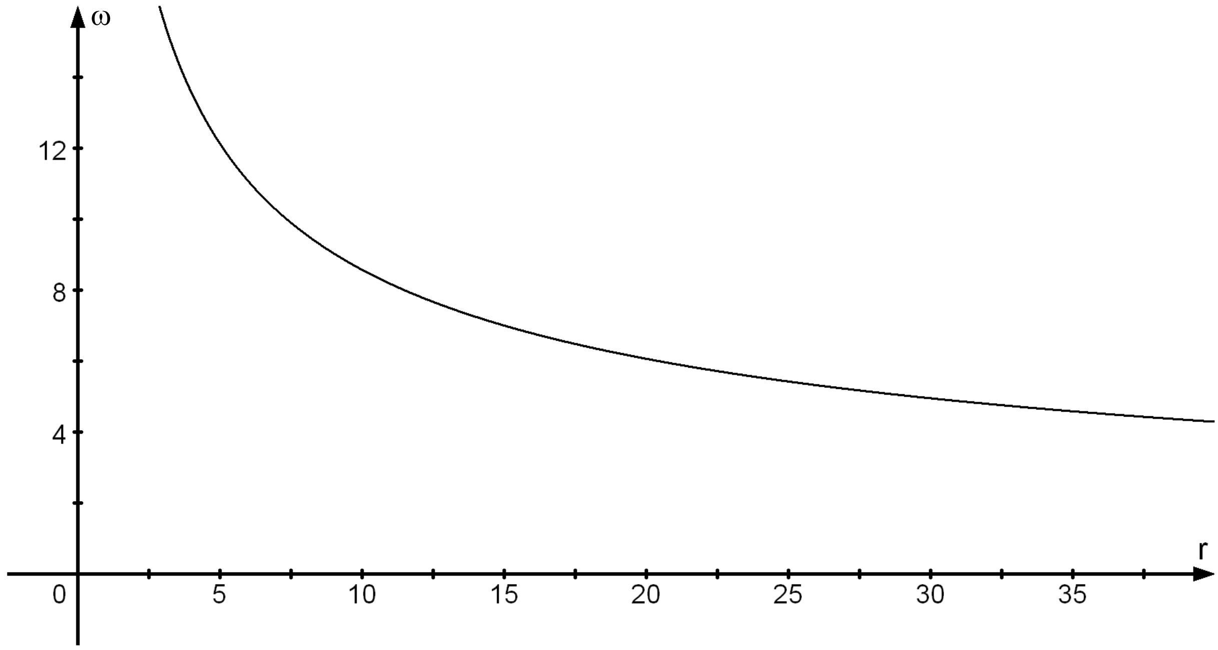
$$\frac{r\omega^2}{g} = \frac{d}{\sqrt{D^2 - d^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{max} = \sqrt{\frac{gd}{\sqrt{D^2 - d^2}} \cdot \frac{1}{r}}$$

16.2 Berechnen Sie die Werte von ω_{max} für folgende Abstände:

r in cm	5,00	10,0	20,0	30,0	40,0
ω in $\frac{1}{s}$	12,1	8,58	6,07	4,95	4,29

Zeichnen Sie $\omega_{max}(r)$ in Abhängigkeit von r für $5{,}00\text{cm} \le r \le 40{,}0\text{cm}$.

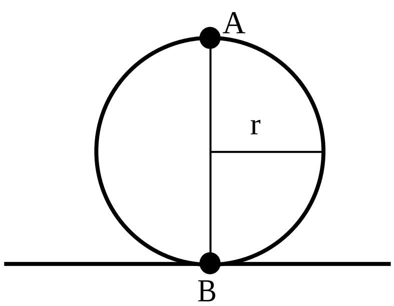
Maßstab: $2{,}5\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1{,}0\text{cm}; 1{,}0\frac{1}{s} \mathrel{\hat{=}} 1{,}0\text{cm}$



8.4 Vertikale Kreisbewegung

Eine Kugel, die an einem Faden befestigt ist durchläuft eine vertikale Kreisbahn mit dem Radius r. (*Diese vertikale Kreisbewegung erfolgt nicht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.*)

Mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes soll nun berechnet werden, wie groß der Betrag der Bahngeschwindigkeit der Kugel im tiefsten Punkt der Bahn mindestens sein muss, damit der Faden im höchsten Punkt gerade noch gespannt bleibt.



Damit im höchsten Punkt der Faden gerade noch gespannt ist muss die resultierende Kraft im Punkt A null sein. Das heißt, dass die Zentripetalkraft gleich der Gewichtskraft sein muss.

Kräftegleichgewicht: (außenstehenden Bezugssystem)

$$\vec{F}_Z = \vec{F}_G$$

$$\text{also: } F_Z = F_G \;\Rightarrow\; m\frac{v_A^2}{r} = mg \;\Rightarrow\; v_A^2 = rg \;\Rightarrow v_A = \sqrt{rg} \quad (1)$$

Energiebilanz:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & E_{Ges(B)} & = & E_{Ges(A)} & & & & \\ E_{pot(B)} & + & E_{kin(B)} & = & E_{pot(A)} & + & E_{kin(A)} & & \\ 0 & + & \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_B^2 & = & m\cdot g\cdot h & + & \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2 & & (1)\text{ eingesetzt} \\ & & \frac{1}{2}\cdot v_B^2 & = & g\cdot 2\cdot r & + & \frac{1}{2}\cdot r\cdot g & & \\ & & v_B^2 & = & 5\cdot r\cdot g & & \Rightarrow & & v_B=\sqrt{5\cdot r\cdot g} \end{array}$$

Das heißt, dass die Geschwindigkeit im Punkt B um den Faktor $\sqrt{5}$ größer sein muss als im Punkt A.

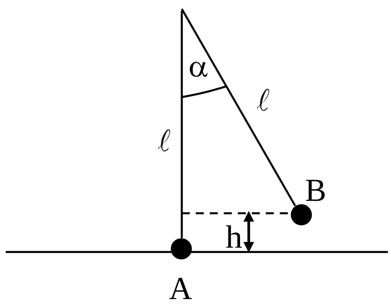
Welche Belastung muss der Faden im tiefsten Punkt aufbringen?
Der Faden muss zwei Kräfte aufbringen. Er muss der Gewichtskraft des Körpers das Gleichgewicht halten und zusätzlich die für die Kreisbewegung nötige Zentripetalkraft aufbringen. Für den Betrag der Fadenspannung gilt dann:

$$F_F = F_G + F_Z$$
$$F_F = mg + m\frac{v_B^2}{r}$$
$$F_F = mg + m\frac{5rg}{r}$$
$$F_F = 6mg = 6F_G$$

Der Betrag der Kraft, die der Faden im tiefsten Punkt aufbringen muss, ist das sechsfache des Betrags der Gewichtskraft des Körpers.

8.5 Fadenpendel

Ein Fadenpendel der Länge ℓ wird um den Winkel α aus seiner Ruhelage ausgelenkt und losgelassen. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Pendels beim Durchgang durch seine Ruhelage?



Energiebilanz:

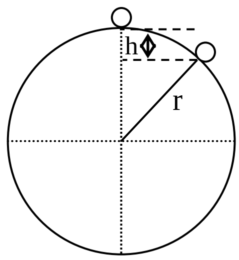
$$\begin{aligned} E_{Ges(A)} &= E_{Ges(B)} \\ E_{pot(A)} + E_{kin(A)} &= E_{pot(B)} + E_{kin(B)} \\ 0 + \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2 &= m\cdot g\cdot h + 0 \\ v_A^2 &= 2\cdot g\cdot \ell\cdot(1-\cos\alpha) \qquad (1)\text{ eingesetzt} \\ v_A &= \sqrt{2\cdot g\cdot \ell\cdot(1-\cos\alpha)} \overset{!}{=} 2\cdot\sqrt{g\cdot\ell}\cdot\sin\tfrac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

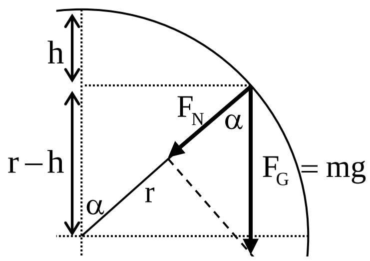
$$\cos\alpha = \frac{\ell - h}{\ell}$$
$$\ell\cdot\cos\alpha = \ell - h$$
$$h = \ell\cdot(1-\cos\alpha) \qquad (1)$$

Auch hier kann man wieder nach der Belastung des Fadens im tiefsten Punkt fragen.

$$F_F = F_G + F_Z$$
$$F_F = m \cdot g + m \frac{v_A^2}{r}$$
$$F_F = m \cdot g + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot \ell \left(1 - \cos\alpha\right)}{\ell}$$
$$F_F = m \cdot g + 2 \cdot m \cdot g - 2 \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \left(3 - 2\cos\alpha\right)$$

17. (S.129/8) Auf einer glatten unbeweglichen Kugel befindet sich ein Massenpunkt in einer labilen Stellung. Wird er aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt, so bewegt er sich zunächst auf der Kugeloberfläche.
In welchem vertikalen Abstand h verlässt der Massenpunkt die Oberfläche?
Bedingung für das Ablösen von der Kugeloberfläche:





$$E_{pot} = E_{kin}$$
$$mgh = \tfrac{1}{2} mv^2$$
$$v^2 = 2gh \qquad \cos\alpha = \frac{r-h}{r}$$
$$F_Z = F_N$$
$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos\alpha$$
$$\frac{2gh}{r} = g\frac{r-h}{r}$$
$$2h = r - h$$
$$3h = r$$
$$h = \tfrac{1}{3} r$$

18.0 Ein Körper der Masse $m = 200\,g$ wird an einer Schnur der Länge $\ell = 1{,}5\,m$ vertikal im Kreis geschleudert.
18.1 Wie groß muss seine Bahngeschwindigkeit mindestens sein, so dass die Schnur jederzeit gespannt ist?

$$F_G = F_Z$$
$$mg = m\frac{v^2}{r}$$
$$v = \sqrt{rg}$$
$$v = \sqrt{1{,}5\,m \cdot 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2}} \approx 3{,}8\,\tfrac{m}{s}$$

18.2 Welche Geschwindigkeit hat der Körper im untersten Punkt der Kreisbahn?

$$\begin{aligned}
E_{Ges,\,oben} &= E_{Ges,\,unten} \\
E_{pot,oben} + E_{kin,\,oben} &= \underbrace{E_{pot,unten}}_{0} + E_{kin,\,unten} \\
mg\cdot 2\ell + \tfrac{1}{2}mv_{oben}^2 &= \tfrac{1}{2}mv_{unten}^2 \\
4g\ell + v_{oben}^2 &= v_{unten}^2 \\
v_{unten} &= \sqrt{4g\ell + v_{oben}^2} \\
v_{unten} &= \sqrt{4\cdot 9{,}81\tfrac{m}{s^2}\cdot 1{,}5\,m + \left(3{,}8\tfrac{m}{s}\right)^2} \approx 8{,}6\tfrac{m}{s}
\end{aligned}$$

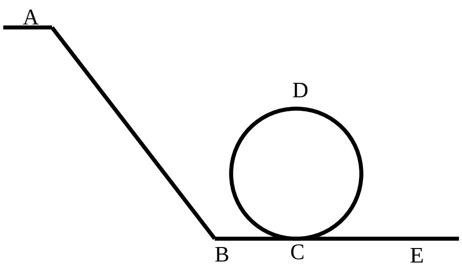
18.3 Welche Kraft muss die Schnur mindestens aushalten?

$$F_{Schnur} = F_G + F_Z$$

$$F_{Schnur} = mg + m\frac{v_{unten}^2}{\ell}$$

$$F_{Schnur} = 0{,}200\,kg\cdot 9{,}81\tfrac{N}{kg} + 0{,}200\,kg\cdot\frac{\left(8{,}6\tfrac{m}{s^2}\right)^2}{1{,}5\,m} \approx 12\,N$$

19.0 In einer Achterbahn bewegt sich ein Wagen der Masse $m = 400\,kg$ eine schiefe Ebene hinab und fährt anschließend in einen Looping mit dem Radius $r = 7{,}5\,m$ ein.



19.1 Welche Geschwindigkeit v_D muss der Wagen im obersten Punkt des Loopings haben, so das der Wagen keine Kraft auf die Schienen ausübt?

19.2 Mit welcher Geschwindigkeit v_C muss der Wagen in den Looping einfahren?

19.3 Aus welcher Höhe h muss der Wagen dazu mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_A = 0$ starten?

19.4 Das wie vielfache der Gewichtskraft erfährt eine Person nach durchfahren des Loopings im untersten Punkt der Bahn?

19.5 Aus welcher Höhe h müsste der Wagen starten, so dass er im obersten Punkt des Loopings mit der Hälfte seiner Gewichtskraft gegen die Schienen gedrückt wird?

19.6 Das wie vielfache der Gewichtskraft erfährt eine Person nun nach durchfahren des Loopings im untersten Punkt der Bahn?

20.0 An einem Faden der Länge $\ell = 1{,}50\,m$ hängt eine Masse $m = 250\,g$. Der Faden wird nun um den Winkel $\alpha = 40°$ nach rechts ausgelenkt.

20.1 Berechnen Sie, welche Arbeit dazu nötig ist; um welche Höhe h wird er ausgelenkt?

20.2 Man lässt das Pendel nun los. Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit v_0 das Pendel im untersten Punkt hat? Welche Kraft muss die Schnur aufbringen? Welche Zeit benötigt das Pendel dazu? (Hinweis: Für die T einer Schwingung gilt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$)

20.3 Nun wird in einer Entfernung von $s = 1{,}35\,m$ vom Aufhängepunkt senkrecht nach unten ein Nagel angebracht. Die Masse vollführt nun einen Looping mit dem Radius r. Reicht die Geschwindigkeit v_0 aus, so dass die Masse den obersten Punkt des Loopings erreicht (Begründen Sie ihre Antwort ohne Rechnung!). Berechnen Sie nun die Geschwindigkeit v_1 im obersten Punkt des Loopings.

Vergleichen Sie nun die Zentripetalkraft mit der Gewichtskraft. Was folgern Sie daraus? Um welchen Winkel α muss das Pendel anfangs ausgelenkt werden, so dass der Looping zustande kommt.