§ 6 Leistung und Wirkungsgrad

Bei der Definition der Arbeit spielt die Zeit, in der diese Arbeit verrichtet wird, bisher keine Rolle. In der heutigen Gesellschaft ist dieser Zeitfaktor aber oft von entscheidender Bedeutung. Eine Leistung ist umso größer, je kürzer die Zeitdauer ist, die für eine bestimmte Arbeit benötigt wird. Es ist somit ein Unterschied, ob eine bestimmte Arbeit in einem kurzen oder in einem längeren Zeitraum zu verrichten ist. Ein Maß, in welcher Zeit t eine bestimmte Arbeit W geleistet wird, ist die Leistung P.

$$\boxed{P = \frac{W}{t}}$$

$$[P] = 1\frac{N \cdot m}{s} = 1\frac{J}{s} = 1W \ \ (\mathrm{Watt})$$

Die Leistung ist somit der Quotient aus der verrichteten Arbeit W und der dafür benötigten Zeit t.

Bei dieser Definition geht man davon aus, dass die Arbeit während der gesamten Zeit konstant ist.
Verändert sich die Arbeit im Laufe der Zeit, so ist hier eine genauere Bezeichnung nötig.

- Kennt man nur Anfangs- und Endzustände der Energie eines Systems, so kann man die **mittlere Leistung** berechnen.

$$P_m = \overline{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{W}{\Delta t}$$

- Ist der funktionale Zusammenhang zur Berechnung der Arbeit bekannt, dann kann die **momentane Leistung** berechnet werden.

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE(t)}{dt} = \dot{E}(t)$$

Bei allen Umwandlungsprozessen tritt in der Realität Reibung auf, womit ein Verlust an mechanischer Energie verbunden ist. Den Quotienten aus genutzter Energie und zugeführter Energie nennt man den Wirkungsgrad η

$$\eta = \frac{E_{nutz}}{E_{zu}} = \frac{W_{nutz}}{W_{zu}} = \frac{P_{nutz}}{P_{zu}}$$

Der Wirkungsgrad gibt auch ein Verhältnis von abgegebener Leistung (Nutzleistung) und zugeführter Leistung an.
Der Wirkungsgrad ist stets kleiner als 1 und sagt etwas über die Wirtschaftlichkeit eines Energiewandlers aus.

Aufgaben:

1. Welche Leistung bringt eine Seilwinde auf, die in 5,0 Sekunden einen Körper 15m weit mit einer Kraft von 2400N zieht?

$$P=\frac{W}{t}=\frac{F\cdot s}{t}=\frac{2400N\cdot 15m}{5,0s}=7200W=7,2kW$$

2. Ein Auto hat eine Leistung von 74kW (100PS). Es erreicht eine Maximalgeschwindigkeit von $175\frac{km}{h}$. Wie groß ist die Widerstandkraft F_R?

$$P=\frac{W}{t}=\frac{F\cdot s}{t}=F\cdot v\quad\Rightarrow F=\frac{P}{v}=\frac{74kW}{175\frac{km}{h}}=\frac{74000W}{48,6\bar{1}\frac{m}{s}}=1522,3N\approx 1,5kN$$

3. Berechne die Leistung, die ein Motorrad bei der Geschwindigkeit $v=40\frac{m}{s}$ entwickelt, wenn es dabei eine Kraft von 250N überwinden muss.

$$P=F\cdot v=250N\cdot 40\frac{m}{s}=10kW$$

4. Bei welcher Geschwindigkeit entwickelt ein Auto bei einer Leistungsabgabe von 65kW die Kraft 1,8kN?

$$P=F\cdot v\quad\Rightarrow v=\frac{P}{F}=\frac{65kW}{1,8kN}=36,\bar{1}\frac{m}{s}=130\frac{km}{h}$$

5. Ein Fahrzeug der Masse 800kg startet mit der konstanten Beschleunigung $a=4,0\frac{m}{s^2}$. Wie groß ist die aufgewendete momentane Leistung 2,0s bzw. 5,0s nach dem Start?

$$E_{kin}=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m(at)^2=\tfrac{1}{2}ma^2t^2\quad \text{mit } v=at$$

$$P(t)=\dot{E}(t)=ma^2t$$

$$P(2,0s)=800kg\cdot(4,0\tfrac{m}{s^2})^2\cdot 2,0s=25,6kW\ \ (34,6PS)$$

$$P(5,0s)=800kg\cdot(4,0\tfrac{m}{s^2})^2\cdot 5,0s=64kW\ \ (86,5PS)$$

6. Ein LkW der Masse 20,0t fährt bergab. Der Neigungswinkel der Straße ist 7,0°. Welche mechanische Leistung müssen die Bremsen in Wärme umwandeln, wenn seine Geschwindigkeit konstant $50\frac{km}{h}$ betragen soll?

$$P=F_H\cdot v=mg\sin\alpha\cdot v=20000kg\cdot 9,81\tfrac{m}{s^2}\cdot\sin 7,0°\cdot 13\tfrac{8}{9}\tfrac{m}{s}\approx 0,33MW$$

7. Aus einem Salzbergwerk soll eine Pumpe Salzsole der Dichte $\rho=1,15\frac{g}{cm^3}$ auf eine Höhe von 50m heben. Mit welcher Leistung P muss die Pumpe betrieben werden, wenn sie 3,6hl pro Minute fördern soll (Stromstärke $I=3,6\frac{hl}{min}$)?

$$P=\frac{W}{t}=\frac{mgh}{t}=\frac{\rho Vgh}{t}=\rho gh\frac{V}{t}=\rho ghI$$

$$P=1,15\tfrac{10^{-3}kg}{10^{-6}m^3}\cdot 9,81\tfrac{m}{s^2}\cdot 50m\cdot 3,6\tfrac{100\cdot 10^{-3}m^3}{60s}=3384,45W\approx 3,4kW$$

6.0 Das Walchenseekraftwerk nutzt die Höhendifferenz zwischen dem Walchensee und dem Kochelsee. Der Walchensee hat eine Fläche von 16,4 km^2. Das Wasser strömt (reibungsfrei) aus dem Walchensee durch Druckrohre in die Turbinen in den $h_0=200\,m$ tiefergelegenen Kochelsee. $\left(\text{Dichte Wasser}:\ \rho_W=1,0\frac{t}{m^3}\right)$

6.1 Um wie viele Strecke d (in cm) sinkt der Wasserspiegel des Walchensees, wenn man dem See eine potentielle Energie von $E_{pot}=1,00\,GJ$ durch das ausströmende Wasser entnimmt? $\left(\text{Hinweis}: d\ll h\right)$

6.2 Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit v_1 die Wasserteilchen in die Turbine gelangen?

6.3 In welcher Höhe h über dem Kochelsee hat das Wasser die Hälfte der Geschwindigkeit v_1 erreicht ?

6.4 Mit welcher Geschwindigkeit v_2 verlassen die Wasserteilchen die Turbine wieder, wenn das Kraftwerk 90% der kinetischen Energie des Wassers in mechanische Arbeit an der Generatorwelle umwandeln kann?

6.5 Der Generator hat einen Wirkungsgrad von $\eta_G = 95\%$. Berechnen Sie, welche elektrische Leistung zur Verfügung steht und ermitteln Sie den Gesamtwirkungsgrad des Kraftwerks.

7.0 Ein Wanderer, der mit seinem Rucksack ein Masse von $m = 90\,\text{kg}$ hat überwindet in einer Zeit von $t = 200\,\text{min}$ einen Höhenunterschied von $\Delta h = 1000\,\text{m}$.

7.1 Berechnen Sie die durchschnittliche Leistung des Wanderers.

7.2 Berechne Sie, welchen Geldwert diese menschliche Arbeit entspricht, wenn man den Tarif der Elektrizitätswerke von $0{,}23\,\frac{\text{ct}}{\text{kWh}}$ zugrunde legt.