§ 5 Energie

Die besprochenen Formen der Arbeit führen zu einer Änderung des Energieinhalts eines Körpers.

Definition: Energie ist die in einem Körper gespeicherte Arbeit.

$$\boxed{W = \Delta E = E_n - E_v}$$

Die Energie eines Körpers ist eine skalare Größe und kann in verschiedenen Formen auftreten. Eine dieser Formen ist die mechanische Energie eines Körpers, die wiederum zwei unterschiedliche Erscheinungsformen besitzt.

5.1 Kinetische Energie

Die Energie, die ein Körper aufgrund seines Bewegungszustandes besitzt, nennt man seine kinetische Energie. Befindet sich ein Körper in Ruhe, so ist seine kinetische Energie null. Um ihn von diesem Ausgangszustand auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen, muss die Beschleunigungsarbeit $W_{Beschl.} = \frac{1}{2}mv^2 - \underbrace{\frac{1}{2}m v_0^2}_{=0} = \frac{1}{2}mv^2$ aufgebracht werden. Diese Beschleunigungsarbeit ist dann in Form von kinetischer Energie im Körper gespeichert.
Es gilt:

$$W_a = \Delta E = E_{kin_n} - \underbrace{E_{kin_v}}_{0} = E_{kin_n} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{da } v_0 = 0$$

Somit folgt für die kinetische Energie:

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2}$$

$$[E_{kin}] = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = N \cdot m = J$$

Bei positiver Beschleunigungsarbeit wächst die kinetische Energie, bei negativer Beschleunigungsarbeit nimmt die kinetische Energie ab.

5.2 Potentielle Energie

Man unterscheidet zwei Formen potentieller Energie

<u>5.2.1 Die potentielle Energie der Erdanziehung (Lageenergie)</u>

Die Energie, die ein Körper auf Grund seiner Lage (Höhe) hat nennt man potentielle Energie. Befindet sich der Körper auf der Erdoberfläche, so ist seine potentielle Energie null. Um ihn von der Erdoberfläche $(h_0 = 0)$ auf die Höhe h zu bringen muss die Hubarbeit $W_{Hub} = m \cdot g \cdot (h - h_0)$ aufgebracht werden. Diese Hubarbeit ist dann in Form von potentieller Energie im Körper gespeichert.
Es gilt:

$$W_{Hub} = \Delta E = E_{pot_n} - \underbrace{E_{pot_v}}_{0} = E_{pot_n} = mgh$$

Somit folgt für die potentielle Energie:

$$\boxed{E_{pot} = mgh}$$

$$\left[E_{pot}\right] = \frac{kg \cdot m \cdot m}{s^2} = N \cdot m = J$$

5.2.2 Die potentielle Energie der Elastizität (Spannenergie einer Feder)

Die Energie, die ein Körper an einer gespannten Feder hat nennt man potentielle Energie (Spannenergie). Befindet sich die Feder im ungedehnten Zustand, so ist seine potentielle Energie null. Um ihn von der Dehnung $s_0 = 0$ auf die Dehnung s zu bringen muss die Spannarbeit $W_{Spann} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \left(s^2 - s_0^2\right)$ aufgebracht werden. Diese Spannarbeit ist dann in Form von potentieller Energie im Körper gespeichert.
Es gilt:

$$W_{Spann} = \Delta E = E_{pot_n} - \underbrace{E_{pot_v}}_{0} = E_{pot_n} = \tfrac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$$

Somit folgt für die potentielle Energie der Feder:

$$\boxed{E_{pot} = \tfrac{1}{2} \cdot D \cdot s^2}$$

$$\left[E_{pot}\right] = \frac{N \cdot m^2}{m} = N \cdot m = J$$

5.3 Wärmeenergie

Reibungsarbeit erhöht die Temperatur eines Körpers und ändert damit die innere Energie des Körpers (ist keine mechanische Energie).

5.4 Der Energieerhaltungssatz der Mechanik

In einem abgeschlossenen System, in dem nur konservative Kräfte wirken, ist die mechanische Gesamtenergie unveränderlich. Die Summe aus potentieller und kinetischer Energie ist zu jeder Zeit bzw. in jedem Bahnpunkt konstant. Es gilt:

$$\boxed{E_{Ges} = E_{pot} + E_{kin} = konst.}$$

$$\boxed{E_{Ges}^{voher} = E_{Ges}^{nachher}}$$

<u>Abgeschlossenes System</u>: Ein System heißt abgeschlossen, wenn zwischen den Körpern des Systems nur Kräfte wirken, die von den Körpern des Systems ausgehen. Diese Kräfte bezeichnet man als innere Kräfte.
<u>Innere konservative Kräfte</u>: Die Arbeit, die die Kräfte verrichten führt nur zu einer Umwandlung von kinetischer in potentieller Energie und umgekehrt. Die mechanische Energie bleibt erhalten.
Reibungskräfte sind keine konservativen Kräfte.

Aufgaben:

1. Ein Auto der Masse $m = 1{,}0\ t$ fährt mit der Geschwindigkeit von $72\,\frac{km}{h}$ ($144\,\frac{km}{h}$).
Berechnen Sie die kinetische Energie des Fahrzeuges und bestimmen Sie die Höhe, aus der es senkrecht herunterfallen müsste um die gleiche Energie zu erhalten.

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} m v^2 \quad E_{kin}(72\,\tfrac{km}{h}) = 0{,}20MJ \quad E_{kin}(144\,\tfrac{km}{h}) = 0{,}80MJ$$

$$E_{pot} = mgh \;\Rightarrow\; h = \frac{E_{pot}}{mg} = \frac{E_{kin}}{mg}$$

$$h\left(0{,}20MJ\right) = 20{,}4m \quad h\left(0{,}80MJ\right) = 81{,}5m$$

2. Mit der Geschwindigkeit von $18\,\frac{km}{h}$ fährt ein Auto gegen eine Betonwand und wird dabei um $0{,}50m$ zusammengedrückt (Knautschzone). Welche Kraft wird dabei auf einen angegurteten Insassen mit der Masse 75 kg ausgeübt, wenn die Kraft während des Abbremsvorgangs konstant ist?

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} m v^2 = F \cdot s = W \;\Rightarrow\; F = \frac{mv^2}{2s} = ... = 1875N \approx 1{,}9kN$$

3.0 Die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs der Masse $m = 1200\,kg$ wird erhöht. Berechnen Sie die zugehörige Beschleunigungsarbeit, wenn das Fahrzeug

3.1 von $v_0 = 80\,\frac{km}{h}$ auf $v_1 = 100\,\frac{km}{h}$ beschleunigt wird.

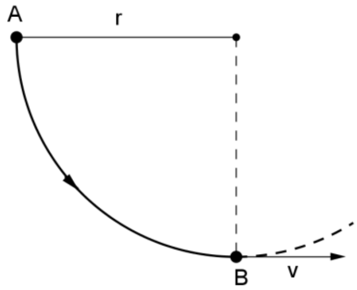
$$W_{Beschl.} = \Delta E = E_{kin_n} - E_{kin_v} = \tfrac{1}{2} m v_1^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m\left(v_1^2 - v_0^2\right) = ... \approx 0{,}17\,MJ$$

3.2 von $v_1 = 100\,\frac{km}{h}$ auf $v_2 = 120\,\frac{km}{h}$ beschleunigt wird.

$$W_{Beschl.} = \Delta E = E_{kin_n} - E_{kin_v} = \tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2 = \tfrac{1}{2} m\left(v_2^2 - v_1^2\right) = ... \approx 0{,}20\,MJ$$

3.3 Zeichnen Sie für $0 \le v \le 120\,\frac{km}{h}$ das zugehörige $v - E_{kin} -$ Diagramm .

4.0 Eine kleine Metallkugel hängt an einem 80 cm langen Faden. Die Kugel befindet sich zuerst im Punkt A und wird dann losgelassen.



4.1 Berechnen Sie die Geschwindigkeit mit der die Kugel durch B schwingt !

$$E^A_{Ges} = E^B_{Ges}$$

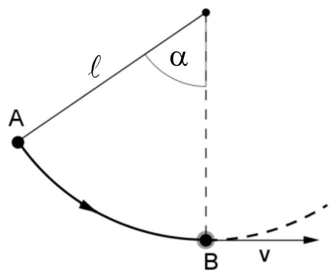
$$E^A_{pot} + \underbrace{E^A_{kin}}_{0} = \underbrace{E^B_{pot}}_{0} + E^B_{kin}$$

$$mgh_A = \tfrac{1}{2} m v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh_A}$$

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 0{,}80\,m} \approx 4{,}0\,\tfrac{m}{s}$$

5. Eine Kugel, welche an einem Fadenpendel der Länge ℓ hängt wird um den Winkel α ausgelenkt und dann losgelassen. Berechne Sie allgemein die Geschwindigkeit v der Kugel im Punkt B.



Zunächst gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\ell - h}{\ell} \quad \Rightarrow \quad h = \ell\left(1-\cos\alpha\right)$$

Energieansatz:

$$E_{Ges}^{A} = E_{Ges}^{B}$$

$$E_{pot}^{A} + \underbrace{E_{kin}^{A}}_{0} = \underbrace{E_{pot}^{B}}_{0} + E_{kin}^{B}$$

$$mgh_A = \tfrac{1}{2} m v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh_A}$$

$$v_B = \sqrt{2g\ell\left(1-\cos\alpha\right)}$$

6.0 Eine Kugel der Masse $m = 2{,}0\,\text{kg}$ rollt auf der horizontalen Strecke AB mit der konstanten Geschwindigkeit von $v_0 = 6{,}0\,\frac{m}{s}$. Bei B kommt die Kugel in eine nach oben führende Rinne BCD von Halbkreisform mit dem Radius $r = 0{,}50\,\text{m}$. Die Reibung und die Rotationsenergie der Kugel sollen vernachlässigt werden.

6.1 Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit die Kugel im Punkt C bzw. D hat. In welche Richtung zeigt der Geschwindigkeitsvektor?

Es gilt: $v_A = v_B = v_0$

Für die Geschwindigkeit im Punkt C gilt:

$$E_{Ges(B)} = E_{Ges(C)}$$

$$E_{kin(B)} + \underbrace{E_{pot(B)}}_{0} = E_{kin(C)} + E_{pot(C)}$$

$$\tfrac{1}{2} m v_B^2 = \tfrac{1}{2} m v_C^2 + m \cdot g \cdot \underbrace{h}_{r} \qquad |\cdot 2|:m$$

$$v_B^2 = v_C^2 + 2g \cdot r$$

$$v_C^2 = v_B^2 - 2g \cdot r$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - 2g \cdot r}$$

$$v_C = \sqrt{\left(6{,}0\,\tfrac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 0{,}50\,m} \approx 5{,}1\,\tfrac{m}{s}$$

Für die Geschwindigkeit im Punkt D gilt:

$$E_{Ges(B)} = E_{Ges(D)}$$
$$E_{kin(B)} + \underbrace{E_{pot(B)}}_{0} = E_{kin(D)} + E_{pot(D)}$$
$$\tfrac{1}{2} m v_B^2 = \tfrac{1}{2} m v_C^2 + m \cdot g \cdot \underbrace{h}_{2r} \qquad | \cdot 2 | : m$$
$$v_B^2 = v_C^2 + 2g \cdot 2r$$
$$v_C^2 = v_B^2 - 4g \cdot r$$
$$v_C = \sqrt{v_B^2 - 4g \cdot r}$$
$$v_C = \sqrt{\left(6{,}0\,\tfrac{m}{s}\right)^2 - 4 \cdot 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 0{,}50\,m} \approx 4{,}0\,\tfrac{m}{s}$$

6.2 Dieselbe Kugel wird mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 6{,}0\,\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben geworfen. Ermitteln Sie, welche Geschwindigkeit die Kugel in einer Höhe von $h = 1{,}0\,m$ hat? In welcher Höhe kehrt die Kugel um?

$$E_{Ges(v)} = E_{Ges(n)}$$
$$E_{kin(v)} + \underbrace{E_{pot(v)}}_{0} = E_{kin(n)} + E_{pot(n)}$$
$$\tfrac{1}{2} m v_v^2 = \tfrac{1}{2} m v_n^2 + mgh$$
$$v_n^2 = v_v^2 - 2gh \quad \Rightarrow \quad v_n = \sqrt{v_v^2 - 2gh} = \ldots \approx 4{,}0\,\tfrac{m}{s}$$

Sie kehrt um, wenn $E_{kin(n)} = 0 \Rightarrow v_n = 0 \Rightarrow v_v^2 = 2gh \Rightarrow h = \dfrac{v_v^2}{2g} = \ldots \approx 1{,}8\,m$

6.3 Welche Fallgeschwindigkeit hat die Kugel, nachdem Sie wieder $1{,}0\,m$ heruntergefallen ist?

Aus $v_n = \sqrt{v_v^2 - 2gh}$ folgt mit $h = \dfrac{v_v^2}{2g} - 1{,}0\,m$:

$$v_n = \sqrt{v_v^2 - 2gh} = \sqrt{v_v^2 - 2g\left(\frac{v_v^2}{2g} - 1{,}0\,m\right)} = \sqrt{2g \cdot 1{,}0\,m} = \ldots \approx 4{,}4\,\tfrac{m}{s}$$

7.0 Eine Federpistole kann mit der Kraft $F = 50\,N$ gespannt werden, wobei die Feder dabei um $s = 8{,}0\,cm$ verkürzt wird.

7.1 Welche maximale Steighöhe erreicht ein senkrecht abgeschossener Pfeil mit der Masse $m = 20\,g$?

$$E_{Ges(v)} = E_{Ges(n)}$$
$$W_{Spann} = \underset{0}{E_{kin(n)}} + E_{pot(n)}$$
$$F \cdot s = mgh$$
$$h = \frac{Fs}{mg} = \frac{50\,N \cdot 0{,}08\,m}{0{,}020\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} \approx 20m$$

7.2 Welche Energieumwandlungen spielen sich bei dem Vorgang ab?

Potentielle Energie der Elastizität $\leftrightarrow$ kinetische Energie $\leftrightarrow$ kinetische Energie + potentielle Energie der Lage $\leftrightarrow$ potentielle Energie $\leftrightarrow$ kinetische Energie + potentielle Energie der Lage

7.3 Welche Anfangsgeschwindigkeit hat das Geschoss?

$$E_{Ges(v)} = E_{Ges(n)}$$
$$\underset{0}{E_{kin(v)}} + \underset{W_{Spann}}{E_{pot(v)}} = E_{kin(n)} + \underset{0}{E_{pot(n)}}$$
$$Fs = \tfrac{1}{2} m v_n^2$$
$$v_n = \sqrt{\frac{2Fs}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50\,N \cdot 0{,}08\,m}{0{,}020\,kg}} = 20\,\tfrac{m}{s}$$

8. Auf einer Tischplatte ist eine lotrechte Spiralfeder $\left(D = 40\,\frac{N}{cm}\right)$ befestigt. Senkrecht über der Feder hängt eine Kugel $(m = 400g)$ in der Höhe $1{,}2m$. Diese Höhe ist vom oberen Federende bis zum tiefsten Kugelpunkt gemessen. Nun fällt die Kugel auf die Feder und staucht sie. (Seitliches Verbiegen ist durch eine Führung ausgeschlossen)
Berechne die maximale Stauchung s_{max} der Feder.

$$E_{pot}^{vorh} = E_{pot}^{nachh}$$
$$mg(h+s) = \tfrac{1}{2} D s^2$$
$$\tfrac{1}{2} D s^2 - mgs - mgh = 0$$
$$s_{1/2} = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2Dmgh}}{D}$$
$$s_{1/2} = \frac{0{,}400\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{N}{kg} \pm \sqrt{\left(0{,}400\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{N}{kg}\right)^2 + 2 \cdot 40\,\frac{N}{cm} \cdot 0{,}400\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{N}{kg} \cdot 1{,}2\,m}}{40\,\frac{N}{cm}}$$
$$s_{1/2} = \begin{cases} 5{,}0 \cdot 10^{-2}\,m \\ \cancel{-4{,}8 \cdot 10^{-2}}\,m \end{cases}$$

9. Ein Schifahrer $(m = 75\,kg)$ fährt einen Hang aus einer Höhe von 50m herunter $(\alpha_{ab} = 25°)$ und den gegenüberliegenden Hang bis zu einer Höhe von 40m wieder hinauf $(\alpha_{auf} = 25°)$. Wie groß ist die mittlere Reibungskraft und die mittlere

Reibungszahl, wenn der Gesamtweg $s = 500\,m$ beträgt?

$$W_R = \Delta E \;\Rightarrow\; F_R \cdot s = E_{pot}^v - E_{pot}^n \;\Rightarrow\; F_R \cdot s = mg(H-h) \;\Rightarrow F_R = \frac{mg(H-h)}{s}$$

$$F_R = \frac{75kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 10m}{500m} = 14{,}715N \approx 15N$$

$$F_R = \mu \cdot F_N = \mu mg \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow \mu = \frac{F_R}{mg \cdot \cos\alpha} = \frac{\frac{mg(H-h)}{s}}{mg \cdot \cos\alpha} = \frac{H-h}{s \cdot \cos\alpha}$$

$$\mu = \frac{10m}{500m \cdot \cos 25°} = 0{,}022$$

10. Ein Eisenbahnzug von $m = 4{,}0 \cdot 10^5\,kg$ wird abgebremst und vermindert auf einer Strecke von $x = 1{,}0\,km$ seine Geschwindigkeit von $v_0 = 7{,}0\frac{m}{s}$ auf $v_1 = 4{,}0\frac{m}{s}$. Wie groß war die Bremskraft und die dem System verlorengegangene Energie?

$$2a_B s = v_1^2 - v_0^2 \;\Rightarrow a_B = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2s}$$

$$F_B = ma_B = m\frac{v_1^2 - v_0^2}{2s} = 4{,}0 \cdot 10^5\,kg \cdot \frac{(4{,}0\frac{m}{s})^2 - (7{,}0\frac{m}{s})^2}{2 \cdot 1000m} = -6600N = -6{,}6 \cdot 10^3\,N$$

$$\Delta E = E_{kin}^n - E_{kin}^v = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_0^2\right)$$

$$\Delta E = \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}0 \cdot 10^5\,kg\left(\left(4{,}0\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(7{,}0\tfrac{m}{s}\right)^2\right) = -6{,}6 \cdot 10^6\,J$$

11.0 Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen.

11.1 Stelle Sie die kinetische und die potentielle Energie in Abhängigkeit von der Wurfzeit t dar.

Für die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Flugzeit t gilt: $v(t) = v_0 - gt$

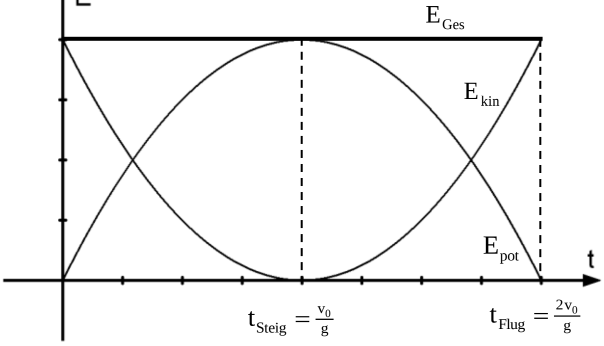
Eingesetzt in $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$:

$$E_{kin}(t) = \tfrac{1}{2}m\left(v_0 - gt\right)^2 = \tfrac{1}{2}m\left(v_0^2 - 2v_0gt + g^2t^2\right) = \tfrac{1}{2}mg^2t^2 - mv_0gt + \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

Für die Höhe h in Abhängigkeit von der Flugzeit t gilt: $h(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

Eingesetzt in $E_{pot} = mgh$:

$$E_{pot}(t) = mg\left(v_0t - \tfrac{1}{2}gt^2\right) = -\tfrac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0t$$



11.2 Zeige, dass für den Zeitpunkt, zudem die kinetische Energie genau so groß ist wie die potentielle Energie, gilt:

$$t_{1/2} = \left(1 \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \tfrac{v_0}{g}$$

Es gilt:

$$E_{kin}(t) = E_{pot}(t)$$

$$\tfrac{1}{2} mg^2t^2 - mv_0gt + \tfrac{1}{2} mv_0^2 = -\tfrac{1}{2} mg^2t^2 + mgv_0t$$

$$\underset{a}{g^2}\, t^2 \underbrace{-2v_0g}_{b}\, t + \underset{c}{\tfrac{1}{2} v_0^2} = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{2v_0g \pm \sqrt{(2v_0g)^2 - 4g^2 \cdot \frac{1}{2} v_0^2}}{2g^2} = \frac{2v_0g \pm \sqrt{4v_0^2g^2 - 2v_0^2g^2}}{2g^2} = \frac{2v_0g \pm \sqrt{2v_0^2g^2}}{2g^2}$$

$$t_{1/2} = \frac{2v_0g \pm v_0g \cdot \sqrt{2}}{2g^2} = \left(1 \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{v_0}{g}$$

12. Welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 hat ein senkrecht nach oben abgeschossenes Teilchen, wenn in der Höhe $h = 2000\,\text{m}$ kinetische und potentielle Energie gleich groß sind?

$$E_{Ges(v)} = E_{Ges(n)}$$

$$E_{kin(v)} + \underset{0}{E_{pot(v)}} = E_{kin(n)} + E_{pot(n)} \quad \text{mit } E_{kin(n)} = E_{pot(n)}$$

$$E_{kin(v)} = 2E_{pot(n)}$$

$$\tfrac{1}{2} mv_v^2 = 2mgh \quad \Rightarrow \quad v_v = 2\sqrt{gh} = \ldots \approx 280{,}1\,\tfrac{m}{s} \approx 1009\,\tfrac{km}{h}$$

13. Eine Kugel fällt aus einer bestimmten Höhe frei herunter und kommt am Boden mit der Geschwindigkeit v an. In welcher Zwischenhöhe h_1 hat sie gerade den halben Betrag der Endgeschwindigkeit? Geben Sie h_1 in Abhängigkeit von h an.

$$E_{Ges(v)} = E_{Ges(n)}$$

$$\underset{0}{E_{kin(v)}} + E_{pot(v)} = E_{kin(n)} + E_{pot(n)}$$

$$mgh = \tfrac{1}{2} mv_n^2 + mgh_1 \quad \text{aus } mgh = \tfrac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_n = \tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2}\sqrt{2gh}$$

$$gh = \tfrac{1}{4} gh + gh_1 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{3}{4} gh = gh_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \tfrac{3}{4} h$$

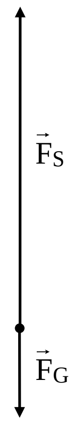
14.0 **(AP 1998 Teil II)** Eine Feuerwerksrakete wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ in der Höhe $h_0 = 0\,\text{m}$, die hier als Bezugsniveau für die potentielle Energie dient, senkrecht nach oben abgeschossen. Es wird unterstellt, dass die Raketenmasse $m = 120\,\text{g}$ während des gesamten Fluges konstant bleibt. Die Rakete ist als Massenpunkt zu betrachten, von Luftreibung wird abgesehen.

Zunächst wird das Zeitintervall $\left[0\,\text{s};\, t_1\right]$ betrachtet. Während dieses Zeitintervalls wirkt eine konstante Schubkraft $\vec{F}_S$ vom Betrag $F_S = 4{,}20\,\text{N}$ senkrecht nach oben.

14.1 Zeichnen Sie einen Kräfteplan, der die auf die Rakete einwirkenden Kräfte enthält. $\left(\text{Maßstab: } 1\,\text{N} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}\right)$

Es gilt:

$F_G = m \cdot g = 0{,}120\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1{,}18\,\text{N}$



14.2 Zeigen Sie durch allgemeine Herleitung, dass für den Betrag der Beschleunigung $\vec{a}$, welche die Rakete erfährt, gilt: $a = \frac{F_S}{m} - g$, wobei g der Betrag der Fallbeschleunigung ist.

Für die resultierende Kraft F_a, welche nach oben gerichtet ist gilt:

$$F_a = F_S - F_G$$
$$m \cdot a = F_S - m \cdot g$$
$$a = \frac{F_S}{m} - g$$

14.3 Berechnen Sie die Höhe h_1, die die Rakete zum Zeitpunkt $t_1 = 1{,}40\,\text{s}$ erreicht.
$[\text{Ergebnis: } h_1 = 24{,}7\,\text{m}]$

Für die Zeit-Orts-Funktion der Rakete (senkrechter Wurf nach oben) gilt:

$$h(t) = \underbrace{h_0}_{0} + \underbrace{v_0}_{0}\, t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$$h(t) = \tfrac{1}{2} a t^2$$

$$h(t) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{F_S}{m} - g\right) \cdot t^2 \qquad (\text{mit } 1.1.2)$$

$$h_1 = h(1{,}40\,\text{s}) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{4{,}20\,\text{N}}{0{,}120\,\text{kg}} - 9{,}81\,\tfrac{\text{N}}{\text{kg}}\right) \cdot (1{,}40\,\text{s})^2 \approx \underline{\underline{24{,}7\,\text{m}}}$$

14.4 Zeigen Sie, dass für den Betrag der Geschwindigkeit $\vec{v}(h)$, welche die Rakete in der Höhe h besitzt, gilt: $v(h) = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{F_S}{m} - g\right) \cdot h}$, wobei $0\,\text{m} \le h \le h_1$.

Mit Hilfe der zeitfreien Gleichung folgt:

$$v^2 - \underbrace{v_0^2}_{0} = 2ah$$

$$v^2 = 2 \cdot \left(\tfrac{F_S}{m} - g\right) \cdot h$$

$$v = \sqrt{2 \cdot \left(\tfrac{F_S}{m} - g\right) \cdot h}$$

14.5 Die mechanische Gesamtenergie der Rakete ist die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie. Weisen Sie - davon ausgehend - nach, dass für diese Gesamtenergie $E_{Ges}(h)$ für $0\,\text{m} \le h \le h_1$ gilt: $E_{Ges}(h) = F_S \cdot h$ und berechnen Sie $E_{Ges}(h_1)$.

Es gilt für die Gesamtenergie in Abhängigkeit von h:

$$E_{ges}(h) = E_{kin}(h) + E_{pot}(h)$$

$$E_{ges}(h) = \tfrac{1}{2} m v^2 + mgh$$

$$E_{ges}(h) = \tfrac{1}{2} m \left(2 \cdot \left(\tfrac{F_S}{m} - g\right) \cdot h\right) + mgh \qquad (\text{mit } 1.1.5)$$

$$E_{ges}(h) = F_S \cdot h - mgh + mgh$$

$$E_{ges}(h) = F_S \cdot h$$

$$E_{ges}(24{,}7\,\text{m}) = 4{,}20\,\text{N} \cdot 24{,}7\,\text{m} \approx \underline{\underline{104\,\text{J}}}$$

14.6 Stellen Sie in einem Diagramm die mechanische Gesamtenergie $E_{Ges}(h)$, die potentielle Energie $E_{pot}(h)$ und die kinetische Energie $E_{kin}(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h für $0\,\text{m} \le h \le h_1$ graphisch dar.
$\left(\text{Maßstab: } 10\,\text{m} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}; 10\,\text{J} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}\right)$

Es gilt:

$E_{Ges}(h) = 4{,}20\,\text{N} \cdot h \quad (\text{Ursprungsgerade})$

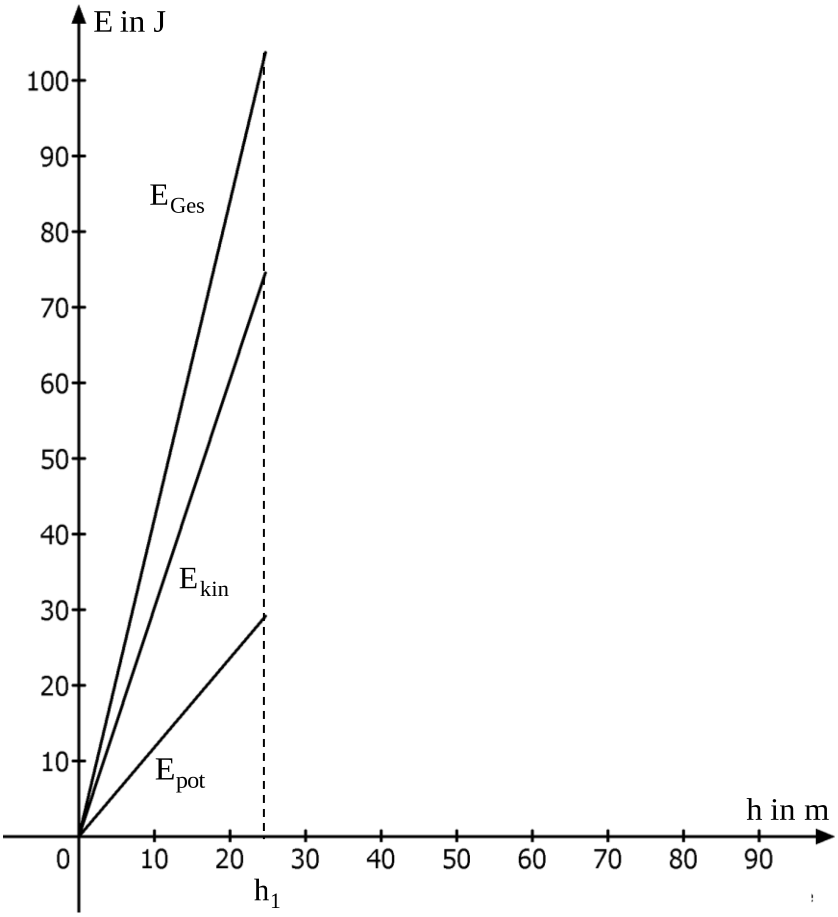
$E_{Ges}(h_1) = 104\,\text{J} \quad (\text{vgl. } 1.1.5)$

$E_{pot}(h) = m \cdot g \cdot h = 1{,}18\,\text{N} \cdot h \quad (\text{Ursprungsgerade})$

$E_{pot}(h_1) = 1{,}18\,\text{N} \cdot 24{,}7\,\text{m} = 29\,\text{J}$

$E_{kin}(h) = E_{Ges}(h) - E_{pot}(h) = 4{,}20\,\text{N} \cdot h - 1{,}18\,\text{N} \cdot h = 3{,}02\,\text{N} \cdot h \quad (\text{Ursprungsgerade})$

$E_{kin}(h_1) = 3{,}02\,\text{N} \cdot 24{,}7\,\text{m} = 75\,\text{J}$



14.7.0 Die Antriebsphase ist zum Zeitpunkt $t_1 = 1,40\,s$ beendet. Trotzdem steigt die Rakete - nun antriebslos - zunächst weiterhin senkrecht nach oben. Schließlich erreicht sie in der Höhe h_2 den höchsten Punkt der Flugbahn.

14.7.1 Berechnen Sie die Höhe h_2.

Nach der Antriebsphase wird keine Arbeit mehr an der Rakete verrichtet, daher bleibt die Gesamtenergie der Rakete konstant. Nach dem Energieerhaltungssatz gilt dann:

$$E_{Ges}(h_1) = E_{Ges}(h_2)$$

$$E_{Ges}(h_1) = \underbrace{E_{kin}(h_2)}_{0} + E_{pot}(h_2)$$

$$E_{Ges}(h_1) = m \cdot g \cdot h_2$$

$$h_2 = \frac{E_{Ges}(h_1)}{m \cdot g}$$

$$h_2 = \frac{104\,J}{0,120\,kg \cdot 9,81\,\frac{N}{kg}} \approx \underline{\underline{88\,m}}$$

14.7.2 Tragen Sie in das Diagramm von 1.1.6 die Gesamtenergie $E_{Ges}(h)$ sowie die potentielle Energie $E_{pot}(h)$ in Abhängigkeit von h für $h_1 \le h \le h_2$ ein, wobei $h_2 = 88,1\,m$ beträgt. Entwickeln Sie daraus den Graphen der kinetischen Energie $E_{kin}(h)$.

Die Gesamtenergie bleibt ja konstant, also gilt für $h_1 \le h \le h_2$: $E_{Ges}(h) = 104\,J$

Die potentielle Energie nimmt mit der Höhe h weiterhin zu, somit gilt:

$$E_{pot}(h) = m \cdot g \cdot h = 1,18\,N \cdot h$$

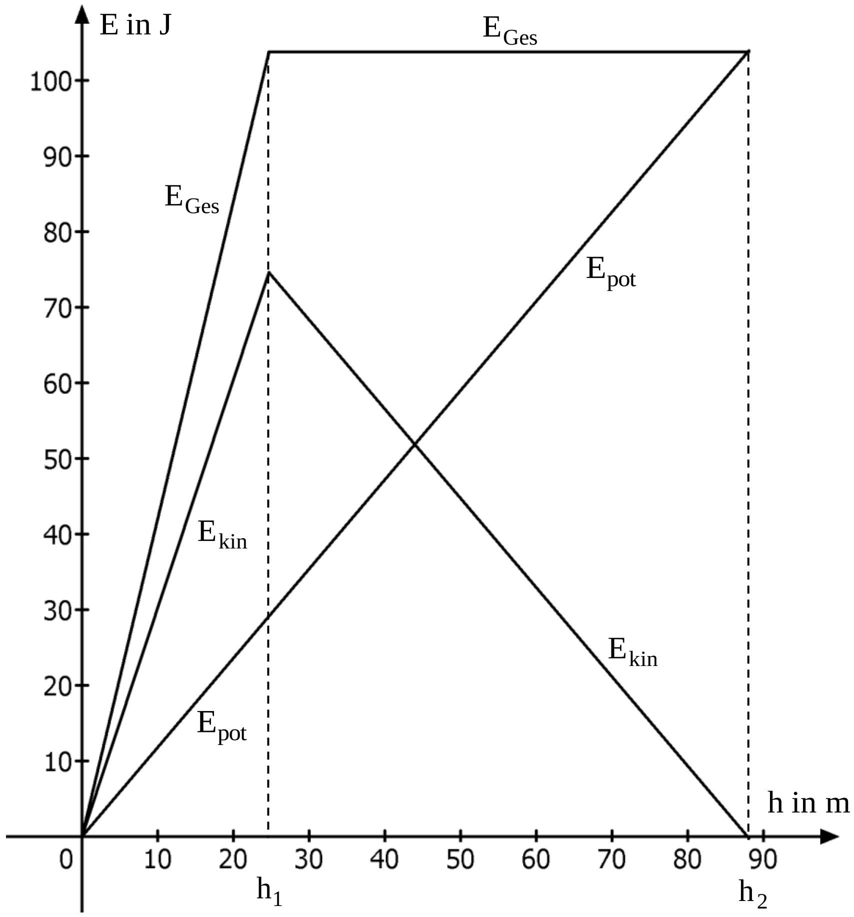
$$E_{pot}(h_2) = 1,18\,N \cdot 88,1\,m \approx 104\,J$$

Somit muss die Gerade lediglich fortgesetzt werden!

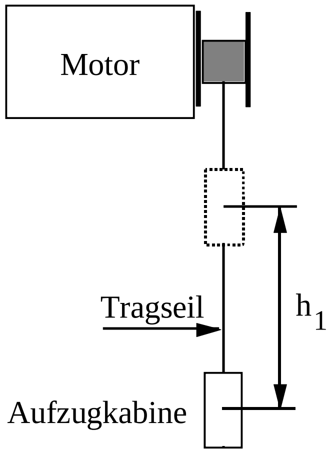
Die kinetische Energie nimmt mit steigender Höhe h ab, es gilt:

$$E_{kin}(h) = E_{Ges}(h) - E_{pot}(h) = 104\,J - 1,18\,N \cdot h$$

Man hat nun eine fallende Gerade mit $E_{kin}(h_2) = 0$


E in J
E_{Ges}
100
90
E_{Ges}
80
E_{pot}
70
60
50
E_{kin}
40
30
E_{kin}
20
E_{pot}
10
h in m
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
h_1
h_2

15.0 **(AP 1999 Teil I)** Eine kleine Aufzugkabine hängt an einem Tragseil, das an einer Welle befestigt ist. Durch einen Motor kann diese Welle gedreht und somit die Aufzugkabine senkrecht nach oben bzw. nach unten bewegt werden.
Zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,s$ startet die Aufzugkabine aus dem Ruhezustand nach oben. Bis zum Zeitpunkt $t_1 = 3{,}50\,s$ legt sie eine Strecke der Länge $h_1 = 3{,}50\ m$ zurück. Auf dieser Strecke erfährt die Kabine die konstante Beschleunigung $\vec{a}$.
Die Kabine besitzt die Masse m = 55,0 kg; die Masse des Tragseils ist zu vernachlässigen.



15.1 Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung $\vec{a}$, welche die Aufzugkabine im Zeitintervall $\left[0\,s; 3{,}50\,s\right]$ erfährt, und den Betrag der Geschwindigkeit $\vec{v_1}$, mit der sich die Aufzugkabine zum Zeitpunkt t_1 bewegt.
$\left[\text{Teilergebnis}: a = 0{,}571\tfrac{m}{s^2}\right]$

Ausgehend von der Bewegungsgleichung $h(t) = \underset{0}{h_0} + \underset{0}{v_0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ folgt:

$$h(t) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad h(t_1) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = h_1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2 \cdot h_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 3{,}50\,m}{(3{,}50\,s)^2} \approx 0{,}571\tfrac{m}{s^2}$$

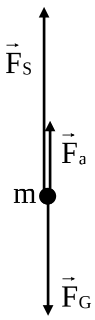
Aus $v(t) = \underset{0}{v_0} + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad v(t) = a \cdot t \quad \Rightarrow \quad v(t_1) = a \cdot t_1 = v_1$

$$v_1 = 0{,}571\tfrac{m}{s^2} \cdot 3{,}50\,s \approx 2{,}00\tfrac{m}{s}$$

15.2 Berechnen Sie - ausgehend von einem Kräfteplan - den Betrag der Kraft, mit der das Tragseil im Zeitintervall $\left[0\,s; 3{,}50\,s\right]$ an der Aufzugkabine zieht.

Es gilt:

$$F_a = F_S - F_G$$
$$F_S = F_a + F_G$$
$$F_S = m \cdot a + m \cdot g$$
$$F_S = m \cdot (a + g)$$
$$F_S = 55{,}0\,kg \cdot \left(9{,}81\tfrac{m}{s^2} + 0{,}571\tfrac{m}{s^2}\right) = 571\,N$$



$\vec{F}_G$: Gewichtskraft
$\vec{F}_a$: beschleunigende Kraft
$\vec{F}_S$: Seilkraft

15.3.0 Im Folgenden ist $W(t)$ die Arbeit, die der Motor im Zeitintervall $[0\,s; t]$ mit $0\ s \le t \le t_1$ an der Aufzugkabine der Masse $m = 55,0\ kg$ verrichtet.

15.3.1 Zeigen Sie, dass gilt: $W(t) = 163\,\frac{J}{s^2} \cdot t^2$.

Da die Kraft $\vec{F}_S$ und der Weg $\vec{h}$ gleichgerichtet sind, gilt für die Arbeit:

$$W(t) = F_S \cdot h(t)$$

$$W(t) = m \cdot (g + a) \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$W(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a \cdot (g + a) \cdot t^2$$

$$W(t) = \frac{1}{2} \cdot 55,0\,kg \cdot 0,571\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(9,81\,\frac{m}{s^2} + 0,571\,\frac{m}{s^2}\right) \cdot t^2$$

$$W(t) = 163\,\frac{J}{s^2} \cdot t^2$$

oder auch so:

$$W(t) = W_{Hub}(t) + W_{Beschl}(t)$$

$$W(t) = m \cdot g \cdot h(t) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v(t))^2$$

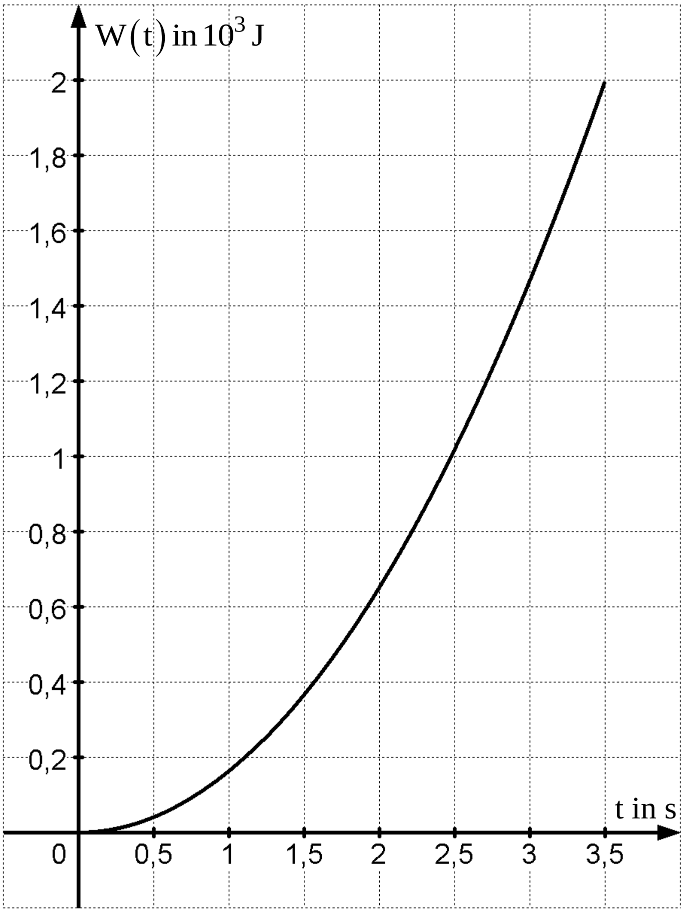
$$W(t) = m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (a \cdot t)^2$$

$$W(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a \cdot (g + a) \cdot t^2$$

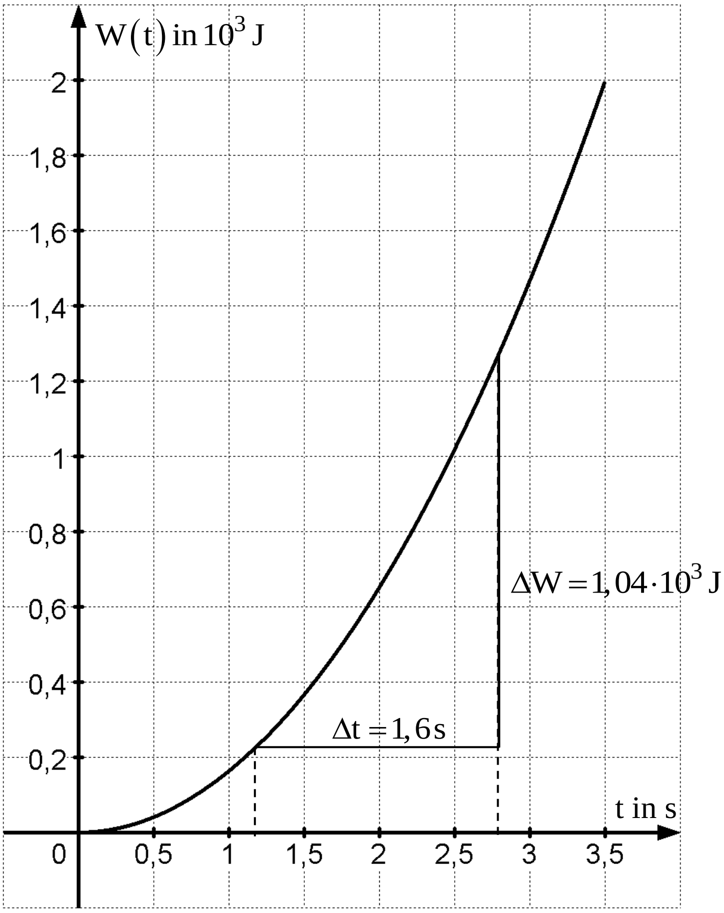
15.3.2 Stellen Sie den zeitlichen Verlauf von $W(t)$ für das Zeitintervall $[0\,\text{s}; 3{,}50\,\text{s}]$ in einem Diagramm graphisch dar. Fertigen Sie dazu eine Wertetabelle mit der Schrittweite $\Delta t = 0{,}50\ \text{s}$ an.

$\left(\text{Maßstab}: 0{,}5\,\text{s} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}; 0{,}2\ \text{kJ} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}\right)$

t in s	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
$W(t)$ in 10^3 J	0	0,041	0,163	0,367	0,652	1,02	1,47	2,00



15.3.3 Ermitteln Sie mit Hilfe des Diagramms die mittlere Leistung, die der Motor im Zeitintervall $\left[1,2\,\text{s};\,2,8\,\text{s}\right]$ an die Aufzugkabine abgibt.



Für die mittlere Leistung gilt:

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W(2,8\,\text{s}) - W(1,2\,\text{s})}{2,8\,\text{s} - 1,2\,\text{s}} = \frac{1,04 \cdot 10^3\,\text{J}}{1,6\,\text{s}} = 0,65\,\text{kW}$$

15.3.4 Berechnen Sie den Momentanwert der Leistung, die der Motor zum Zeitpunkt $t^* = 2{,}5\text{ s}$ der Aufzugkabine zuführt.

Die Leistung zur Zeit $t^* = 2{,}5\text{s}$ erhält man aus der Differentialrechnung. Es gilt:

$$P(t) = \dot{W}(t) = 2 \cdot 163\,\tfrac{J}{s^2} \cdot t = 326\,\tfrac{J}{s^2} \cdot t$$

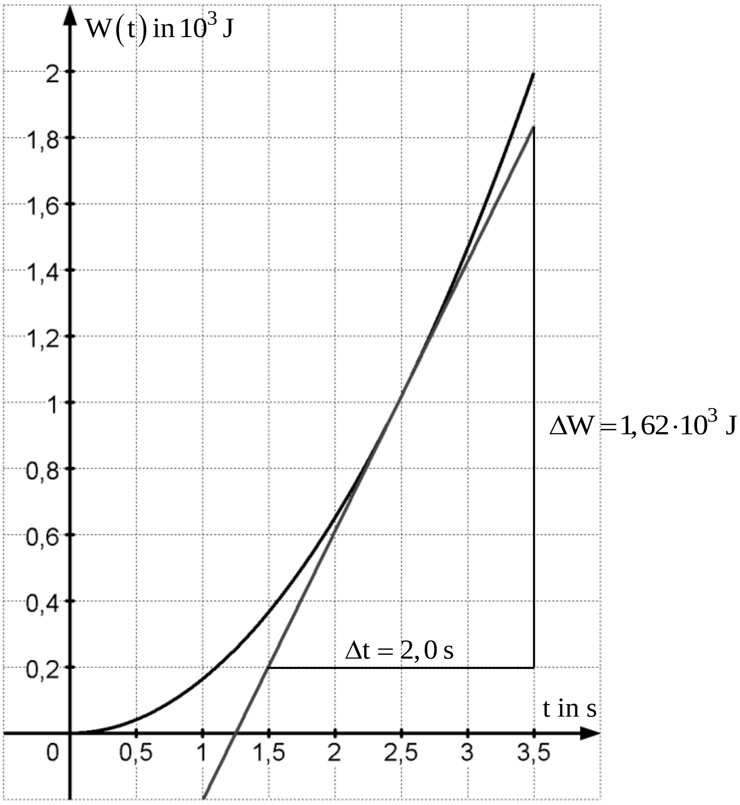
$$P(2{,}5\text{s}) = 326\,\tfrac{J}{s^2} \cdot 2{,}5\text{s} \approx 0{,}82\,\text{kW}$$

Alternativ könnte man in obige Zeichnung an der Stelle $t^* = 2{,}5\text{s}$ eine Tangente an den Graph der Funktion $W(t)$ anlegen und deren Steigung mit Hilfe eines Steigungsdreiecks ermitteln. Die Leistung zur Zeit $t^* = 2{,}5\text{s}$ folgt dann aus

$$P(2{,}5\text{s}) = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$P(2{,}5\text{s}) = \frac{1{,}62 \cdot 10^3\text{ J}}{2{,}0\text{s}}$$

$$P(2{,}5\text{s}) = 0{,}81\text{kW}$$



15.4.0 Die Aufzugkabine befindet sich im Ruhezustand. Plötzlich reißt das Tragseil. 0,40 s nach dem Reißen drücken die Backen der beiden Abfangbremsen mit den Normalkräften $\overrightarrow{F_{N,1}}$ bzw. $\overrightarrow{F_{N,2}}$ gegen die beiden Führungsschienen der Aufzugkabine. Für die Beträge der Normalkräfte gilt: $F_{N,1} = F_{N,2} = 2{,}0\ \mathrm{kN}$. Die Reibungszahl für die Reibung zwischen Bremsbacken und Führungsschienen beträgt 0,30.

15.4.1 Berechnen Sie die Gesamtlänge der Strecke, welche die Aufzugkabine zurücklegt, bis sie wieder zum Stillstand kommt.

Der Gesamtweg setzt sich aus zwei Teilstrecken zusammen.

<u>1. Freier Fall</u> mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ und der Falldauer $t_{Fall} = 0{,}40\,s$:
Für die Fallhöhe h_1 gilt:

$$h_1 = \tfrac{1}{2}\cdot g\cdot t_{Fall}^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 9{,}81\tfrac{m}{s^2}\cdot(0{,}40\,s)^2 = 0{,}785\,m$$

Für die Geschwindigkeit v_1 nach durchfallen der Fallhöhe gilt:

$$v_1 = g\cdot t_{Fall} = 9{,}81\tfrac{m}{s^2}\cdot 0{,}40\,s = 3{,}92\,\tfrac{m}{s}$$

<u>2. Bremsstrecke</u> mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = 3{,}92\tfrac{m}{s}$

Relativ schnell erhält man die Höhe h_2 aus einer kleinen Energiebetrachtung:
Steht die Aufzugskabine still, so hat sie in dieser Lage weder kinetische noch potentielle Energie. In der Höhe h_2 aber hatte sie sowohl kinetische als auch potentielle Energie, welche beim Bremsvorgang in Form von Arbeit abgegeben wurde. Somit gilt:

$$E_{pot} + E_{kin} = W_{Reib}$$

$$mgh_2 + \tfrac{1}{2}mv_1^2 = F_{Reib}\cdot h_2 \qquad F_{Reib} = \mu\cdot F_N$$

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 = \mu\cdot F_N\cdot h_2 - mgh_2$$

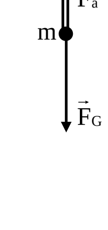
$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 = (\mu\cdot F_N - mg)\cdot h_2$$

$$h_2 = \frac{\tfrac{1}{2}mv_1^2}{\mu\cdot F_N - mg}$$

$$h_2 = \frac{\tfrac{1}{2}\cdot 55{,}0\,kg\cdot\left(3{,}92\,\tfrac{m}{s}\right)^2}{0{,}30\cdot 2\cdot 2000\,N - 55{,}0\,kg\cdot 9{,}81\tfrac{N}{kg}} = 0{,}640\,m$$

Für die Gesamtstrecke h folgt nun: $h = h_1 + h_2 = 0{,}785\,m + 0{,}640\,m \approx \underline{\underline{1{,}4\,m}}$

<u>*Alternativ wäre auch folgender Lösungsweg richtig gewesen*</u>. Es gilt nämlich:



$$F_a = F_G - F_{Reib}$$

$$m\cdot a = m\cdot g - \mu\cdot(F_{N,1} + F_{N,2})$$

$$a = g - \tfrac{\mu}{m}\cdot(F_{N,1} + F_{N,2})$$

$$a = 9{,}81\tfrac{m}{s^2} - \frac{0{,}30}{55{,}0\,kg}\cdot 4{,}0\cdot 10^3\,N = -12{,}0\tfrac{m}{s^2}$$

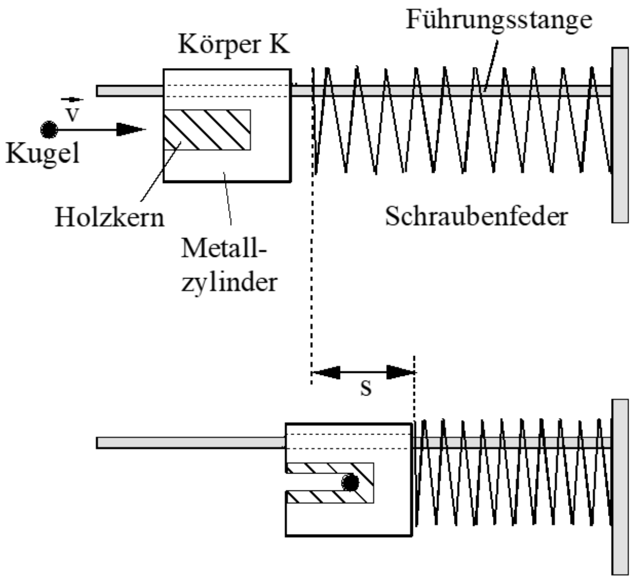
Die Bremsstrecke h_2 erhält man nun aus der zeitfreien Gleichung mit der Endgeschwindigkeit $v_{end} = 0$.

$$2 \cdot a \cdot h_2 = v_{end}^2 - v_1^2$$

$$h_2 = \frac{-v_1^2}{2 \cdot a}$$

$$h_2 = -\frac{\left(3{,}92\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot \left(-12{,}0\,\frac{m}{s^2}\right)} = 0{,}640\,m$$

16.0 **(AP 2001 Teil I)** Mit Hilfe der dargestellten Anordnung lässt sich der Betrag der Geschwindigkeit einer Gewehrkugel bestimmen. Eine Gewehrkugel mit der Masse $m = 0,60\,\text{g}$ trifft mit horizontaler Geschwindigkeit $\vec{v}$ auf einen Körper K der Masse $M = 200,0\,\text{g}$. K besteht aus einem einseitig offenen Metallzylinder und einem Holzkern. Die Kugel dringt in den Körper K ein und bleibt darin stecken. K kann sich zusammen mit der in ihm steckenden Kugel reibungsfrei auf einer horizontalen Führungsstange bewegen und prallt gegen das freie Ende einer Schraubenfeder mit der Federkonstanten $D = 70\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$. s ist die Länge der Strecke, um die die Feder nach dem Aufprall zusammengedrückt wird.
Für die Schraubenfeder gilt auch bei Druckbelastungen, wie sie in den folgenden Aufgaben auftreten, das Hooke´sche Gesetz. Die Masse der Feder wird vernachlässigt.



16.1 Erläutern Sie die Energieumwandlung, die beim Eindringen der Gewehrkugel in den Holzkern des Körpers K, und die Energieumwandlung, die beim Stauchen der Feder auftritt.

Energieumwandlung beim Eindringen der Gewehrkugel in den Metallzylinder:
Kinetische Energie der Kugel → Verformung und Erwärmung des Holzkerns + Kinetische Energie des Metallzylinder samt Kugel.
Energieumwandlung beim Stauchen der Feder:
Kinetische Energie des Metallzylinders samt Kugel → Spannenergie der Feder (Potentielle Energie der Elastizität)

16.2 Zeigen Sie, dass für den Betrag v der Geschwindigkeit der Gewehrkugel vor dem Eindringen in den Körper K gilt:

$$v = \frac{\sqrt{D\cdot(M+m)}}{m}\cdot s$$

Kugel tritt in Holzkern ein (→ Impulserhaltungssatz!):

$$p_v = p_n$$

$$m\cdot v = (m+M)\cdot u$$

$$u = \frac{m}{m+M}\cdot v \qquad (1)$$

Metallzylinder samt Kugel staucht die Feder (→ Energieerhaltungssatz!):

$$E_{Ges}(\text{vorher}) = E_{Ges}(\text{nachher})$$

$$E_{kin}(\text{vorher}) + \underbrace{E_{pot}(\text{vorher})}_{0} = \underbrace{E_{kin}(\text{nachher})}_{0} + E_{pot}(\text{nachher})$$

$$\tfrac{1}{2}(m+M)\cdot u^2 = \tfrac{1}{2}D\cdot s^2 \qquad |\cdot 2$$

$$(m+M)\cdot u^2 = D\cdot s^2 \qquad (1)$$

$$(m+M)\cdot\left(\frac{m}{m+M}\cdot v\right)^2 = D\cdot s^2$$

$$(m+M)\cdot\frac{m^2}{(m+M)^2}\cdot v^2 = D\cdot s^2$$

$$\frac{m^2}{m+M}\cdot v^2 = D\cdot s^2 \qquad |:m^2|\cdot(m+M)$$

$$v^2 = \frac{D\cdot(m+M)}{m^2}\cdot s^2 \qquad |\sqrt{\ }$$

$$v = \sqrt{\frac{D\cdot(m+M)}{m^2}\cdot s^2}$$

$$v = \frac{\sqrt{D\cdot(m+M)}}{m}\cdot s$$

16.3.0 In einem Messversuch wird die Feder durch den Aufprall des Körpers K um $s = 4{,}0\,\text{cm}$ zusammengedrückt.

16.3.1 Berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von 16.2 den Betrag v der Geschwindigkeit, mit der die Gewehrkugel auf den Körper K trifft.

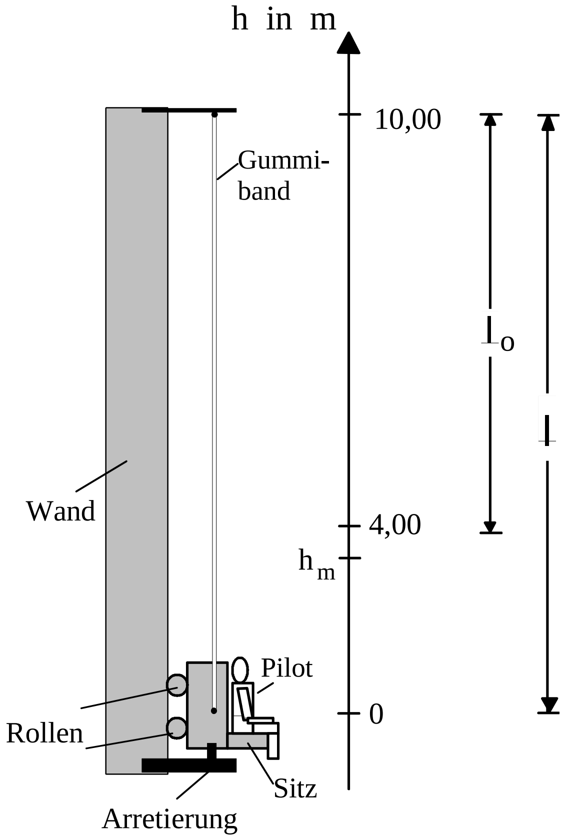
16.3.2 Berechnen Sie die beim Eindringen der Gewehrkugel in den Körper K in Wärme und Deformationsarbeit umgesetzte Energie.

16.3.3 Nach dem Aufprall auf das linke Ende der Schraubenfeder wird der Körper K mit der in ihm steckenden Kugel abgebremst. Dabei ist der Betrag der auftretenden Verzögerung nicht konstant ist.
Berechnen Sie den maximalen Betrag der auftretenden Verzögerung

16.3.4 Berechnen Sie die Länge Δt des Zeitintervalls, in dem die Feder um $s = 4,0\,\text{cm}$ zusammen- gedrückt wird.

17.0 **(AP2003 Teil II)** Zukünftige Testpiloten werden einer speziellen Ausbildung unterzogen. Unter anderem werden sie für große Beschleunigungen trainiert, wie sie z.B. beim Notausstieg mit Hilfe eines Schleudersitzes vorkommen. Für das Training eignet sich die in der Skizze dargestellte Anordnung.

Ein Sitz, der auf Rollen eine Wand hoch laufen kann, ist am unteren Ende eines Gummibandes befestigt. Im unbelasteten Zustand besitzt das Gummiband die Länge $\ell_0 = 6,00\,\text{m}$.



Zur Vereinfachung wird angenommen, dass für das Gummiband bei den Belastungen, wie sie in den folgenden Aufgaben auftreten, das Hooke´sche Gesetz gilt. Das Gummiband besitzt die Elastizitätskonstante $D = 4{,}50 \cdot 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Der Sitz wird nach unten gezogen, wobei das Gummi-band auf die Länge $\ell = 10{,}00\,\text{m}$ gedehnt wird. Mit einer Arretierung wird der Sitz festgehalten. Nachdem der Pilot auf dem Sitz Platz genommen hat, wird die Arretierung gelöst.

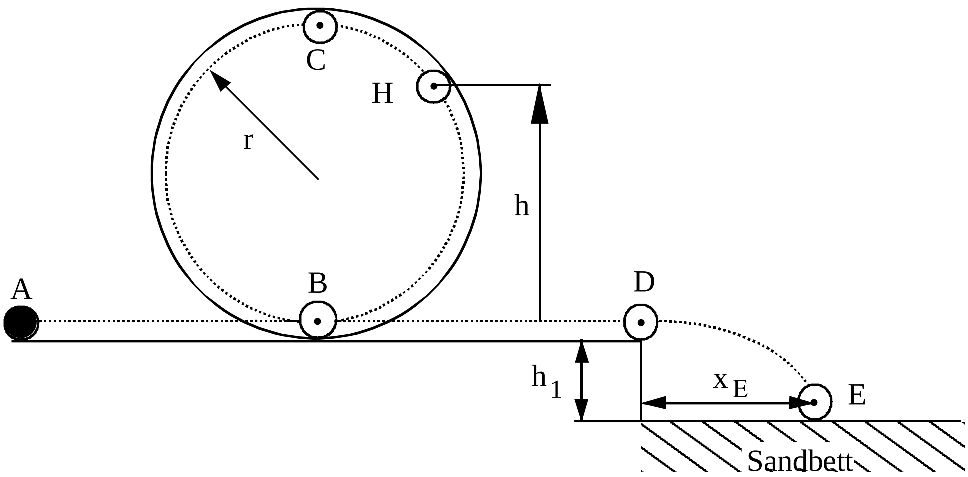
Das aus dem Sitz und dem Piloten bestehende System SP hat die Gesamtmasse $m = 180\,\text{kg}$. Die Masse des Gummibands, Reibungsverluste und die Rotationsenergie der Rollen bleiben unberücksichtigt.

17.1 Zeichnen Sie einen Kräfteplan, der alle Kräfte enthält, die unmittelbar nach dem Lösen der Arretierung auf das System SP wirken.

17.2 Berechnen Sie den Betrag a_0 der Beschleunigung, die das System SP zu Beginn der Bewegung erfährt.

17.3 In der Höhe h_m über der Startposition ist der Betrag der resultierenden Kraft auf das System SP gleich Null.
Berechnen Sie die Höhe h_m und begründen Sie, dass der Betrag der Geschwindigkeit des Systems SP bei der Aufwärtsbewegung in dieser Höhe seinen maximalen Wert erreicht.
$\left[\text{Ergebnis}: h_m = 3{,}61\,\text{m}\right]$

18.0 **(AP 2000 Teil I)** Das Bild zeigt die Spielbahn einer Minigolfanlage. Nach dem Abschlag bewegt sich ein Golfball (Masse $m = 50\,g$) zunächst auf der horizontalen Strecke $[AB]$, durchläuft dann in einer Rinne eine vertikale Kreisbahn, passiert den Punkt D und landet schließlich in einem Sandbett. Die punktiert gezeichnete Linie stellt die Bahnkurve des Golfballschwerpunktes dar; die zugehörige Kreisbahn hat den Radius $r = 31\,cm$. Im Folgenden sind Reibung und Rotationsenergie des Balls zu vernachlässigen.



Beim Abschlag wird der Golfball innerhalb von $7{,}5\,ms$ aus der Ruhe heraus auf eine Geschwindigkeit vom Betrag $v_0 = 4{,}5\,\frac{m}{s}$ beschleunigt. Mit dieser Geschwindigkeit bewegt sich der Ball bis zum Punkt B.

18.1 Berechnen Sie den mittleren Betrag der Kraft, die der Golfschläger während des Beschleunigungsvorgangs auf den Ball ausübt.

$$F_a = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0{,}050\,kg \cdot \frac{4{,}5\,\frac{m}{s}}{7{,}5 \cdot 10^{-3}\,s} = 30\,N$$

18.2 Während der Golfball auf der vertikalen Kreisbahn umläuft, ist der Betrag v seiner Geschwindigkeit abhängig von der Höhe h. Zeigen Sie durch allgemeine Herleitung, dass gilt: $v(h) = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}$, wobei g der Betrag der Fallbeschleunigung ist.

$$E_{Ges}(h=0) = E_{Ges}(h)$$

$$E_{kin}(h=0) + \underbrace{E_{pot}(h=0)}_{0} = E_{kin}(h) + E_{pot}(h)$$

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m (v(h))^2 + mgh$$

$$\tfrac{1}{2}(v(h))^2 = gh - \tfrac{1}{2} v_0^2$$

$$(v(h))^2 = 2gh - v_0^2$$

$$v(h) = \sqrt{2gh - v_0^2}$$

18.3 Das Bezugsniveau für die potentielle Energie wird im Punkt B gewählt.
Stellen Sie in einem Diagramm für die Bewegung auf der Kreisbahn die Abhängigkeit der potentiellen Energie E_{pot}, der kinetischen Energie E_{kin} und der Gesamtenergie E_{Ges} des Balls von der Höhe h graphisch dar.
$\left(\text{Maßstab}: 0{,}1\,\text{m} \hat{=} 1\,\text{cm};\ 0{,}1\,\text{J} \hat{=} 1\,\text{cm}\right)$

Es gilt:

$$E_{pot}(h) = m \cdot g \cdot h = 50 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 9{,}81\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot h = 0{,}49\tfrac{\text{J}}{\text{m}} \cdot h \quad \left(\text{Ursprungsgerade}\right)$$

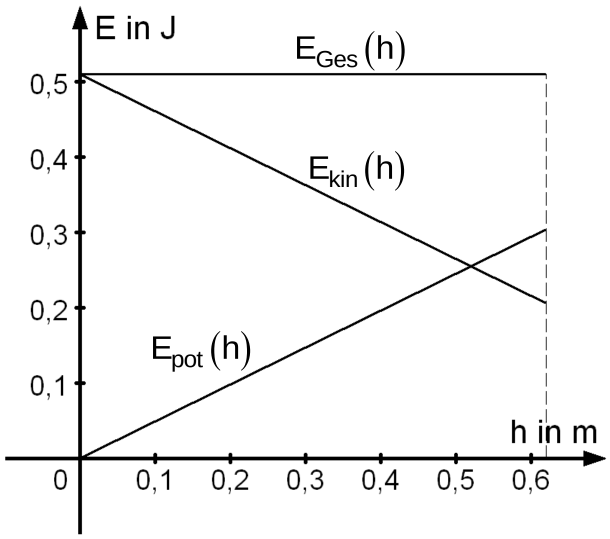
$$E_{Ges}(h) = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 50 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \left(4{,}5\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 0{,}51\,\text{J} \quad \left(\text{Paralle zur h} - \text{Achse}\right)$$

$$E_{kin}(h) = E_{Ges}(h) - E_{pot}(h) = 0{,}51\,\text{J} - 0{,}49\tfrac{\text{J}}{\text{m}} \cdot h \quad \left(\text{Gerade mit negativer Steigung}\right)$$

Zum Zeichnen der beiden Gerade benötigt man noch jeweils einen Punkt:

$$E_{pot}(h = 2r) = 0{,}49\tfrac{\text{J}}{\text{m}} \cdot 2 \cdot 0{,}31\text{m} = 0{,}30\,\text{J}$$

$$E_{kin}(h = 2r) = 0{,}51\,\text{J} - 0{,}30\,\text{J} = 0{,}21\,\text{J}$$



18.4 Ermitteln Sie anhand eines Kräfteplans den Betrag der Kraft, die im höchsten Punkt der vertikalen Kreisbahn von der Rinne auf den Golfball ausgeübt wird.

18.5.0 Der Golfball verlässt in B die kreisförmige Rinne und erreicht den Punkt D mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_D$. Es gilt: $v_D = v_0 = 4{,}5\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$. Der Golfball durchfällt die Höhe $h_1 = 17\,\text{cm}$ und schlägt im Sandbett auf.

18.5.1 Bestimmen Sie durch allgemeine Rechnung die Gleichung der Bahnkurve bezüglich eines geeignet gewählten Koordinatensystems, auf der sich der Golfball zwischen den Punkten D und E bewegt.

Als Bezugsnullpunkt wählt man das Sandbett.

Für die Bewegung in x-Richtung gilt: $x(t) = x_0 + v_{0_x} t \overset{x_0=0}{\Rightarrow} x = v_0 t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0}$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung in h-Richtung:

$$h(t) = h_0 + v_{0_y} t - \tfrac{1}{2} g t^2 \underset{v_{0_y}=0}{\Rightarrow} h = h_0 - \tfrac{1}{2} g t^2 = h_0 - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$$

Gleichung der Bahnkurve: $h(x) = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$

18.5.2 Berechnen Sie die Länge x_E der Strecke, die der Ball ab dem Punkt D bis zum Aufschlag im Sandbett in horizontaler Richtung zurücklegt.

Für die Wurfweite x_E folgt dann:

$$h(x_E) = 0$$

$$h_1 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x_E^2 = 0$$

$$\frac{g}{2v_0^2} \cdot x_E^2 = h_1$$

$$x_E^2 = \frac{2v_0^2 \cdot h_1}{g}$$

$$x_E = \sqrt{\frac{2v_0^2 \cdot h_1}{g}}$$

$$x_E = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(4{,}5\,\frac{m}{s}\right)^2 \cdot 0{,}17\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}} = 0{,}84\,m$$

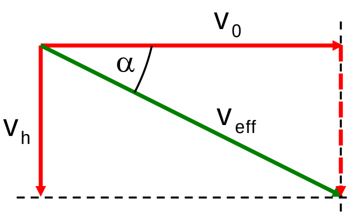
18.5.3 Ermitteln Sie rechnerisch Betrag und Richtung der Geschwindigkeit $\vec{v}_E$, mit welcher der Ball im Sandbett auftrifft.

Zunächst muss man die Fallzeit t_F berechnen.

$$y(t_F) = h_1 - \tfrac{1}{2} g t_F^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_F = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

Dann folgt für die Geschwindigkeitskomponente beim Aufprall in h-Richtung:

$$v_h = v(t_F) = -g \cdot t_F = -g \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = -\sqrt{2gh_1}$$



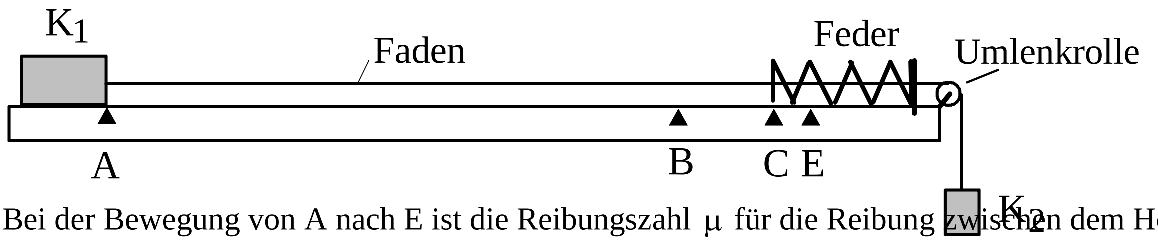
$$v_{eff} = \sqrt{v_0^2 + v_h^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh_1}$$

$$v_{eff} = \sqrt{\left(4{,}5\,\frac{m}{s}\right)^2 + 2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}17\,m} = 4{,}9\,\frac{m}{s}$$

Bleibt noch der Aufprallwinkel α zu bestimmen. Es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{|v_h|}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{v_0} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}17\,m}}{4{,}5\,\frac{m}{s}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 22°$$

19.0 **(AP 2004 Teil I)** Ein Holzklotz K_1 mit der Masse $m_1 = 350\,g$ befindet sich auf einer horizontalen Unterlage und ist über einen Faden, der über eine Umlenkrolle läuft, mit einem Körper K_2 verbunden. Der Holzklotz K_1 wird im Punkt A aus der Ruhe heraus losgelassen. In dem Augenblick, in dem K_1 den Punkt B erreicht, setzt der Körper K_2 auf dem Boden auf. Der Holzklotz bewegt sich weiter nach rechts und stößt im Punkt C auf das freie Ende einer horizontal angeordneten Schraubenfeder. Bei der maximalen Stauchung der Feder erreicht die Vorderkante des Holzklotzes gerade den Punkt E.



Bei der Bewegung von A nach E ist die Reibungszahl μ für die Reibung zwischen dem Holzklotz und
Die Massen von Faden, Feder und Umlenkrolle sowie die Reibung im Rollenlager sind in den folgenden Aufgaben zu vernachlässigen.
Während der Bewegung auf der Strecke $[AB]$ nimmt der Betrag v der Momentangeschwindigkeit $\vec{v}$ des Holzklotzes zu. Es soll experimentell untersucht werden, welcher Zusammenhang dabei zwischen v und der Länge s der vom Holzklotz zurückgelegten Wegstrecke besteht.
Bei der Durchführung des Versuches erhält man folgende Messwerte:

s in m	0,20	0,40	0,60	0,80
v in $\frac{m}{s}$	0,39	0,55	0,68	0,78

19.1 Erläutern Sie, wie der Betrag v der Momentangeschwindigkeit, die der Holzklotz nach Durchlaufen einer Strecke der Länge s besitzt, experimentell bestimmt werden kann.

19.2 Zeigen Sie durch graphische Auswertung der Messreihe, dass folgende Gleichung gilt:

$$v^2 = k \cdot s,$$

wobei k konstant, d.h. unabhängig von s ist.

19.3.0 Der Holzklotz bewegt sich auf der Strecke $[AB]$ mit der konstanten Beschleunigung $\vec{a}_1$.

19.3.1 Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms von Teilaufgabe 18.2 den Betrag a_1 dieser Beschleunigung $\vec{a}_1$.

$\left[\text{Ergebnis}: a_1 = 0{,}38\,\frac{m}{s^2}\right]$

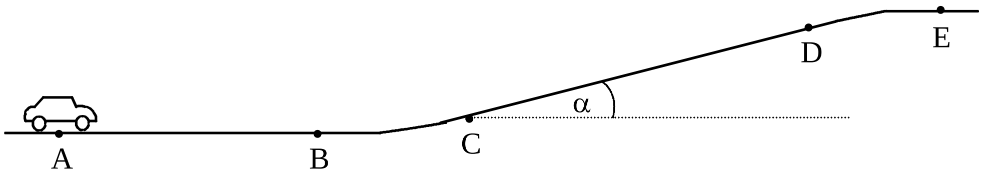
19.3.2 Berechnen Sie die Masse m_2 des Körpers K_2.

19.4 Bei der Bewegung von B nach E nimmt der Betrag der Geschwindigkeit des Holzklotzes ab.
Begründen Sie, dass der Betrag der Beschleunigung (Verzögerung) bei der Bewegung von B nach C konstant ist, dagegen bei der Bewegung von C nach E ständig anwächst.

19.5.0 Im Punkt C stößt der Holzklotz mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_C$ auf das freie Ende der Feder mit der Federkonstanten $D = 16\,\frac{N}{m}$. Nun wird die Feder gestaucht. Die maximale Stauchung der Feder beträgt $s_{max} = 3{,}6\,cm$.

19.5.1 Berechnen Sie den Betrag v_C der Geschwindigkeit $\vec{v}_C$.

20.0 **(AP 2002 Teil I)** Ein Auto mit der Masse $m = 1{,}2\ \text{t}$ bewegt sich auf einer Fahrbahn, deren Profil in der obenstehenden Skizze dargestellt ist. Die Fahrbahn verläuft zunächst horizontal, ist zwischen den Punkten C und D um den Winkel $\alpha = 12^{\text{o}}$ gegen die Horizontale geneigt und verläuft ab dem Punkt E wieder horizontal.
Die Reibung im Getriebe und im Antrieb, der Luftwiderstand und die Rotationsenergie der Räder sind in den folgenden Aufgaben zu vernachlässigen.



20.1 Das Auto passiert den Punkt A zum Zeitpunkt $t_A = 0\,\text{s}$ mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $v_A = 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Auf der geradlinigen Strecke $[AB]$ mit der Länge $s_{AB} = 64\,\text{m}$ wird das Auto gleichmäßig auf eine Geschwindigkeit vom Betrag $v_B = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ beschleunigt.
Berechnen Sie den Betrag a der Beschleunigung und den Zeitpunkt t_B, zu dem das Auto den Punkt B erreicht.

Es gilt:

$$2as_{AB} = v_B^2 - v_A^2$$

$$a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2s_{AB}}$$

$$a = \frac{\left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 64\,\text{m}} = \underline{\underline{2{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Die benötigte Zeit berechnet am leichtesten aus der Formel:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} \qquad (t_A = 0)$$

$$a = \frac{v_B - v_A}{t_B}$$

$$t_B = \frac{v_B - v_A}{a}$$

$$t_B = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{4{,}0\,\text{s}}}$$

20.2.0 Ab dem Zeitpunkt t_B übt der Motor eine Zugkraft aus, die so groß ist, dass der Betrag der Geschwindigkeit des Autos bis zum Punkt E konstant bleibt.
Die Reibungszahl für die Rollreibung zwischen den Autoreifen und der Fahrbahn beträgt $\mu = 0{,}020$.
Im Zeitintervall $[t_C; t_D]$ legt das Auto die geradlinige Strecke $[CD]$ zurück.

20.2.1 Zeichnen Sie für einen Zeitpunkt t mit $t_C < t < t_D$ einen Kräfteplan, der alle Kräfte enthält, die auf das Auto wirken.

$\vec{F}_G$: Gewichtskraft

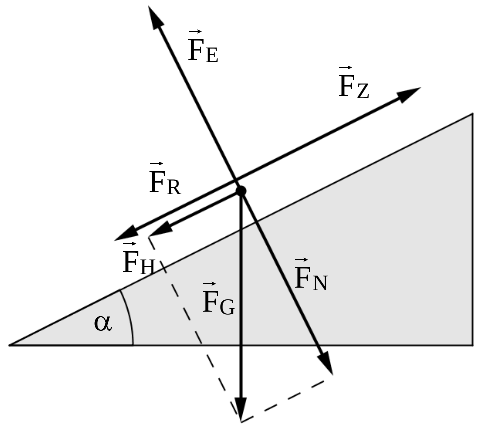
$\vec{F}_N$: Normalkraft

$\vec{F}_H$: Hangabtriebskraft

$\vec{F}_E$: Elast. Kraft d. Fahrbahn $\left(\vec{F}_E = -\vec{F}_N\right)$

$\vec{F}_R$: Reibungskraft

$\vec{F}_G$: Zugkraft



20.2.2 Berechnen Sie die mechanische Leistung, die der Motor im Zeitintervall $[t_C; t_D]$ abgibt.

Es gilt:

$F_a = F_Z - F_H - F_R$

Da sich aber der Körper mit konstanter Geschwindigkeit v_B bewegt, ist $a = 0$ und somit folgt:

$0 = F_Z - F_H - F_R$

$F_Z = F_H + F_R$

$F_Z = F_H + \mu \cdot F_N$

$F_Z = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$

$F_Z = mg\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)$

Für die mechanische Leistung folgt nun:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F_Z \cdot \Delta s}{\Delta t} = F_Z \cdot \underbrace{\tfrac{\Delta s}{\Delta t}}_{v_B} = F_Z \cdot v_B = mg \cdot v_B\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)$$

$$P = 1{,}2 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(\sin\left(12°\right) + 0{,}020 \cdot \cos\left(12°\right)\right) \approx \underline{\underline{54\,\text{kW}}}$$

20.3 Die Bremskraft, die maximal auf ein Auto ausgeübt werden kann, ist bestimmt durch die Haftreibungszahl für den Autoreifen auf der Fahrbahn. Ab dem Punkt E bewegt sich das Auto auf horizontaler Fahrbahn mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $v_E = 20\,\frac{m}{s}$.

Berechnen Sie die Länge s_{Br} des Bremsweges, den das Auto mindestens benötigen würde, um von dieser Geschwindigkeit in den Stillstand abzubremsen, wenn die Haftreibungszahl $\mu_H = 0{,}55$ beträgt.

Es gilt:

$$W_{Reib} = \Delta E_{kin}$$

$$F_{Reib} \cdot s_{Brems} = \tfrac{1}{2} m v_E^2 \qquad F_{Reib} = \mu \cdot F_N = \mu \cdot F_G = \mu \cdot mg$$

$$\mu \cdot mg \cdot s_{Brems} = \tfrac{1}{2} m v_E^2$$

$$s_{Brems} = \frac{v_E^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(20\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0{,}55 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} \approx \underline{\underline{37\,m}}$$

Oder auch so:

Da der Körper aufgrund der Reibung seine Geschwindigkeit verringert gilt:

$$F_a = -F_R$$

$$ma = -\mu mg$$

$$a = -\mu g$$

und außerdem:

$$2ax = \underset{0}{v^2} - v_E^2$$

$$x = \frac{-v_E^2}{2a} \overset{a=-\mu g}{=} \frac{-v_E^2}{-2\mu g} = \frac{v_E^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$$