§ 2 Bewegung mit konstanter Beschleunigung

2.1 Gleichmäßige Beschleunigung eines Massenpunktes

Verändert sich die Geschwindigkeit eines Körpers mit der Zeit, so sagt man, er führe eine beschleunigte Bewegung aus. Ein Maß dafür ist die Beschleunigung a, die sich aus dem Quotienten der Geschwindigkeitsveränderung Δv und der dafür benötigten Zeit Δt ergibt.

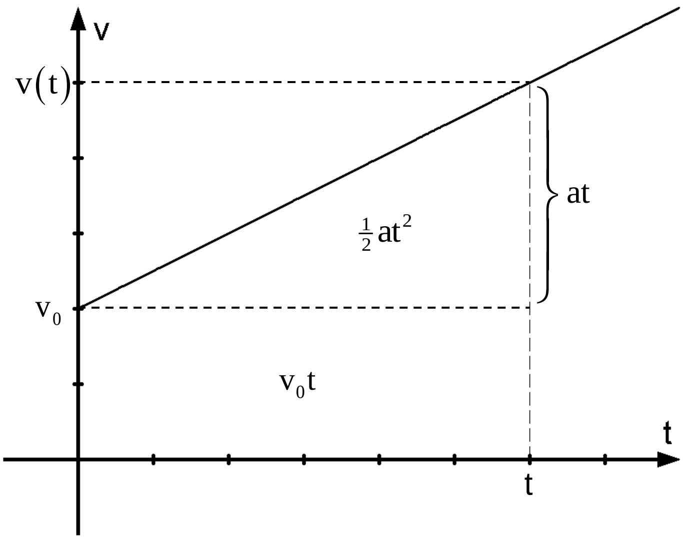
$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad [a] = \frac{m}{s^2}$$

Durch Umformung erhält man:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$\Delta t \cdot a = \Delta v$$
$$(t_1 - t_0) \cdot a = v_1 - v_0 \qquad \text{mit } t_0 = 0$$
$$a \cdot t_1 = v_1 - v_0$$
$$v_1 = a \cdot t_1 + v_0$$

$$\boxed{v(t) = a \cdot t + v_0} \qquad \boxed{\text{Zeit-Geschwindigkeitsfunktion}}$$

Die Zeit-Geschwindigkeitsfunktion im t-v-Diagramm ist somit eine Gerade deren Steigung der Beschleunigung a entspricht und der y-Achsenabschnitt die Anfangsgeschwindigkeit v_0 angibt:



Der in der Zeit t zurückgelegte Weg entspricht (wie schon bei der gleichförmigen Bewegung) der Fläche, die vom Graph der Zeit-Geschwindigkeitsfunktion und der t-Achse eingeschlossen wird.

$$x = A_{Rechteck} + A_{Dreieck} = v_0 t + \tfrac{1}{2}\left(v(t) - v_0\right)t$$

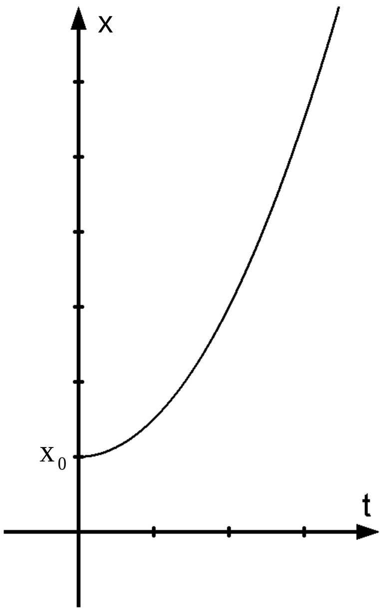
setzt man $v(t) = a \cdot t + v_0$ ein, so folgt dann:

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}\left(a \cdot t + v_0 - v_0\right)t$$
$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a \cdot t \cdot t$$
$$\Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

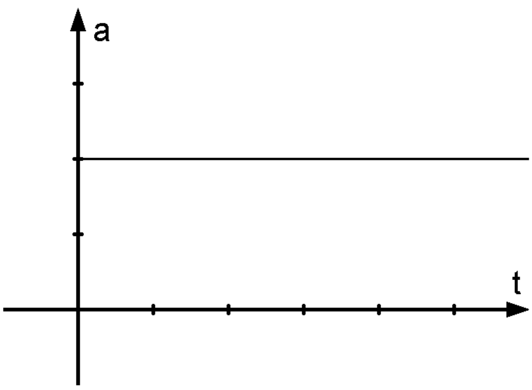
Hat der Körper vom Koordinatenursprung die Entfernung x_0, so folgt:

$$\boxed{x(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0} \qquad \boxed{\text{Zeit-Ortsfunktion}}$$

Der Graph der Zeit-Ortsfunktion ist somit eine Parabel.



Für die Zeit Beschleunigungsfunktion gilt: $a(t) = a = \text{konst.}$
Ihr Graph ist eine parallele zur Zeit-Achse



Ausgehend von den Gleichungen:

$$x(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$
$$v(t) = at + v_0$$

lässt sich noch eine zeitfreie Gleichung herleiten. Zunächst setzen wir der Einfachheit halber $x_0 = 0$ und lösen die Zeit-Geschwindigkeitsfunktion nach t auf.

$$v(t) = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad t = \tfrac{v - v_0}{a}$$

und setzt dies in die Zeit-Ortsfunktion $x(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t$ ein. Man erhält:

$$x = \tfrac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 + v_0 \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = \tfrac{1}{2} a \cdot \frac{(v - v_0)^2}{a^2} + v_0 \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(v - v_0)^2}{a} + v_0 \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = \frac{v - v_0}{a} \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot (v - v_0) + v_0 \right)$$

$$x = \frac{v - v_0}{a} \cdot \left(\tfrac{1}{2} v - \tfrac{1}{2} v_0 + v_0 \right)$$

$$x = \frac{v - v_0}{a} \cdot \left(\tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{2} v_0 \right)$$

$$x = \frac{v - v_0}{2a} \cdot (v + v_0)$$

$$x = \frac{1}{2a} \left(v^2 - v_0^2 \right)$$

Macht man das ganze bruchfrei, so erhält man:

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2ax}$$

Aufgaben:

1. Beim Testen verschiedener Pkws wurden diese von
   a) 0 auf $80 \frac{km}{h}$ in $8,0s$
      $a = 2\frac{7}{9} \frac{m}{s^2} \approx 2,8 \frac{m}{s^2}$
   b) 0 auf $100 \frac{km}{h}$ in $12,3s$
      $a \approx 2,26 \frac{m}{s^2}$
   c) $80 \frac{km}{h}$ auf $120 \frac{km}{h}$ in $15,5s$ (im fünften Gang)
      $a \approx 0,72 \frac{m}{s^2}$

   gebracht. Berechne die Beschleunigung der Fahrzeuge.

2. Eine Lokomotive erhält aus dem Stillstand eine konstante Beschleunigung von $0,750 \frac{m}{s^2}$. Nach welcher Zeit hat sie die Geschwindigkeit $65,0 \frac{km}{h}$ erreicht?
   $t \approx 24,1s$

3. Ein Porsche fährt mit einer Geschwindigkeit von $100 \frac{km}{h}$. Innerhalb von $3,0s$ kann das Fahrzeug komplett abgebremst werden. Berechne seine Verzögerung.
   $a = -9,3 \frac{m}{s^2}$

4.0 Der Ferrari von Michael Schumacher beschleunigt in $2,81s$ von 0 auf $100 \frac{km}{h}$.

4.1 Welche Strecke legt er dabei zurück?

$$v(t) = at + v_0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{100\,\frac{km}{h} - 0\,\frac{km}{h}}{2{,}81\,s} = \frac{(100:3{,}6)\,\frac{m}{s}}{2{,}81\,s} = 9{,}89\,\frac{m}{s^2}$$

$$x(t) = \underbrace{x_0}_{0} + \underbrace{v_0}_{0}t + \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}at^2$$

$$x(2{,}81\,s) = \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}89\,\frac{m}{s}^2 \cdot (2{,}81\,s)^2 = 39{,}0\,m$$

4.2 Welche Strecke legt er zurück, wenn er sein Fahrzeug mit einer Verzögerung von $12{,}0\,\frac{m}{s^2}$ von $100\,\frac{km}{h}$ auf 0 abbremst?

$$\underbrace{v^2}_{0} - v_0^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{\left((100:3{,}6)\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot \left(-12{,}0\,\frac{m}{s^2}\right)} = \underline{\underline{32{,}2\,m}}$$

5.0 Eine U-Bahn fährt mit einer konstanten Beschleunigung von $0{,}8\,\frac{m}{s^2}$ an. Die Zeitzählung beginnt bei der Ortsmarke Null.

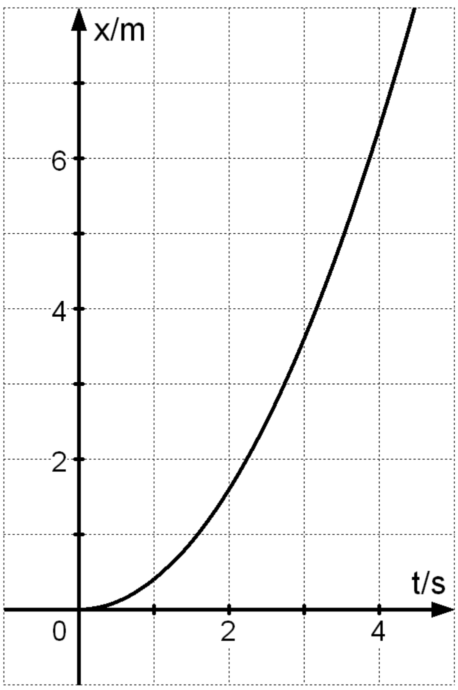
5.1 Gib die Zeit-Orts-Funktion, die Zeit-Geschwindigkeits-Funktion und die Zeit-Beschleunigungsfunktion für die Bewegung an.

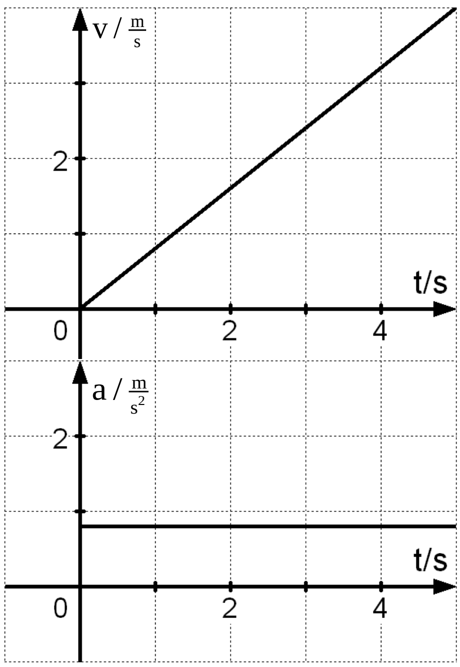
$$x(t) = \underbrace{x_0}_{0} + \underbrace{v_0}_{0}t + \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0{,}4\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

$$v(t) = a \cdot t + \underbrace{v_0}_{0} = a \cdot t \quad \Rightarrow \quad v(t) = 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot t$$

$$a(t) = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$$

5.2 Zeichne das t-x-Diagramm, das t-v-Diagramm und das t-a-Diagramm für $0 \le t \le 5\,s$.





6.0 Ein Körper wird aus der Ruhe in $2,0\,\text{min}$ mit konstanter Beschleunigung auf die Geschwindigkeit $12\,\frac{m}{s}$ gebracht.

6.1 Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und berechnen Sie den bis dahin zurückgelegten Weg.
Anschließend fährt der Körper mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

Es gilt: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12\,\frac{m}{s} - 0\,\frac{m}{s}}{120\,s - 0\,s} = 0{,}10\,\frac{m}{s^2} \quad \Rightarrow \quad a_1(t) = 0{,}10\,\frac{m}{s^2}$

$v_1(t) = 0{,}10\,\frac{m}{s^2} \cdot t$

$x_1(t) = 0{,}05\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

$x_1(120\,s) = 0{,}05\,\frac{m}{s^2} \cdot (120\,s)^2 = 720\,m$

6.2 Stellen Sie für die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit die entsprechenden Bewegungsgleichungen auf.

$a_2(t) = 0$

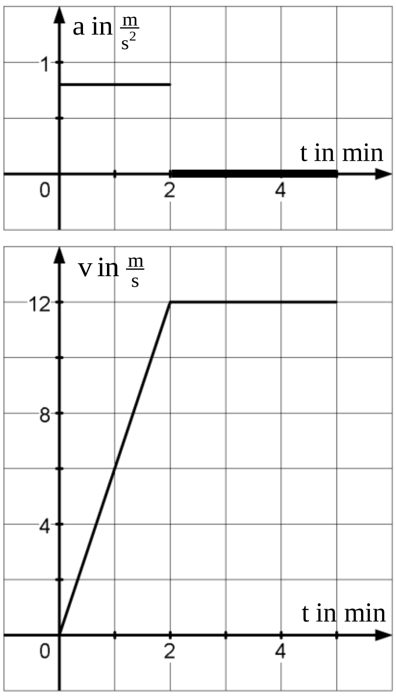
$v_2(t) = 12\,\frac{m}{s}$

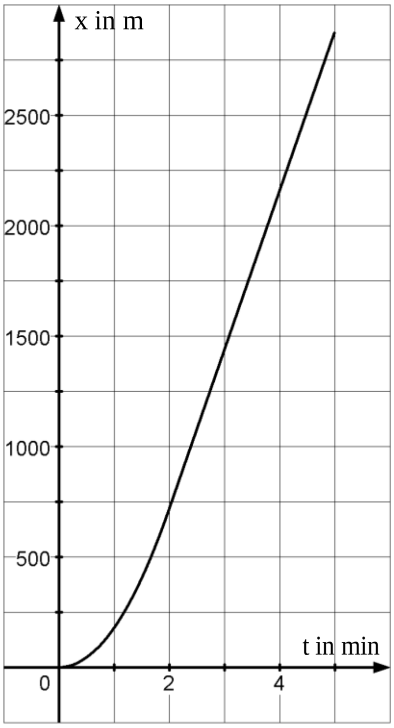
$x_2(t) = 12\,\frac{m}{s} \cdot t + 720\,m$

6.3 Berechnen Sie den Weg, den der Körper nach einer Gesamtfahrzeit von 5,0min zurückgelegt hat.

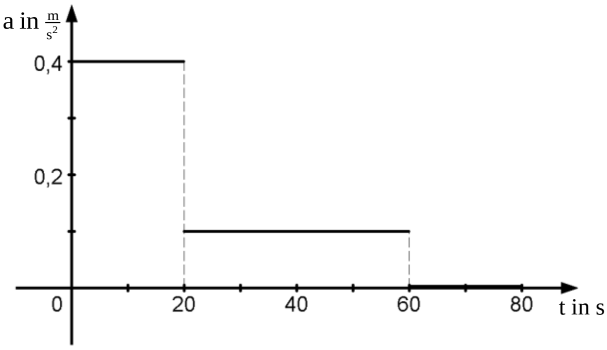
$x_2(180\,s) = 12\,\frac{m}{s} \cdot 180\,s + 720\,m = 2{,}88\,km$

6.4 Zeichnen Sie zu diesen beiden Bewegungsvorgänge $(0 \le t \le 5{,}0\,\text{min})$ das Zeit-Beschleunigungs-Diagramm, das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm und das Zeit-Orts-Diagramm.





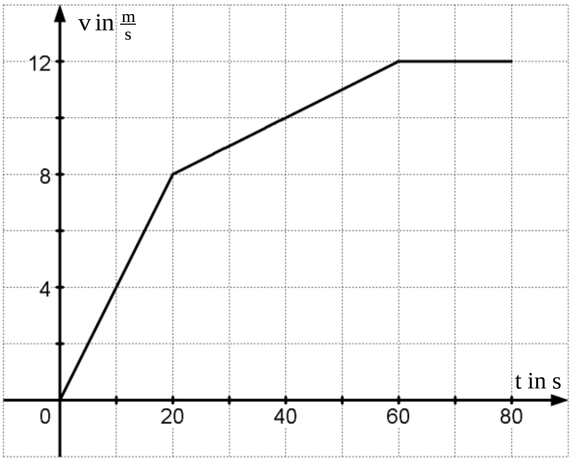
7.0 Ein Zug fährt an. Die Abhängigkeit seiner mittleren Beschleunigung von der Zeit gibt folgendes Diagramm an.



7.1 Berechne die Geschwindigkeiten, die der Zug nach 20s, 60s und 80s hat, und zeichne auch das t-v-Diagramm.

Es gilt: $v(t) = a \cdot t + v_0$

$$v(20\,s) = 20\,s \cdot 0{,}4\,\tfrac{m}{s^2} = 8{,}0\,\tfrac{m}{s}$$
$$v(60\,s) = (60\,s - 20\,s) \cdot 0{,}1\,\tfrac{m}{s^2} + 8{,}0\,\tfrac{m}{s} = 12\,\tfrac{m}{s}$$
$$v(80\,s) = (80\,s - 60\,s) \cdot 0\,\tfrac{m}{s^2} + 12\,\tfrac{m}{s} = 12\,\tfrac{m}{s}$$



7.2 Berechne mithilfe des t-v-Diagramms den zurückgelegten Weg für die gleichen Zeitpunkte.

Es gilt: Den zurückgelegten Wert erhält man durch Flächenberechnung

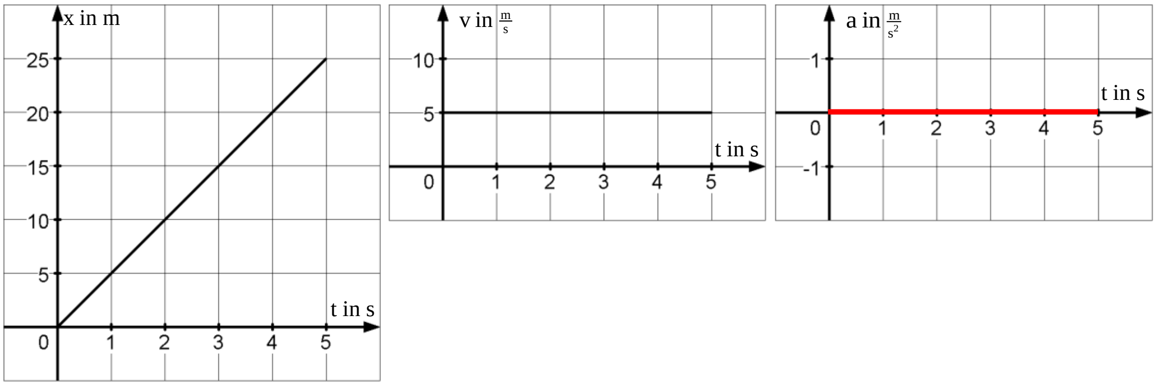
$$x_1 = \tfrac{1}{2} \cdot 20\,s \cdot 8\,\tfrac{m}{s} = 80\,m$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 4\,\tfrac{m}{s} \cdot 40\,s + 8{,}0\,\tfrac{m}{s} \cdot 40\,s = 400\,m$$
$$x_3 = 20\,s \cdot 12\,\tfrac{m}{s} = 240\,m$$
$$x_G = 80\,m + 400\,m + 240\,m = 720\,m$$

8. Beim Abschuss eines Geschosses tritt eine mittlere Beschleunigung von $a = 4{,}5 \cdot 10^5\,\frac{m}{s^2}$ auf. Das Geschoss wird auf einem $x = 80\text{cm}$ langen Weg beschleunigt. Berechne die Endgeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$, die das Geschoss nach dieser Beschleunigungsstrecke hat, und die dazu benötigte Zeit.

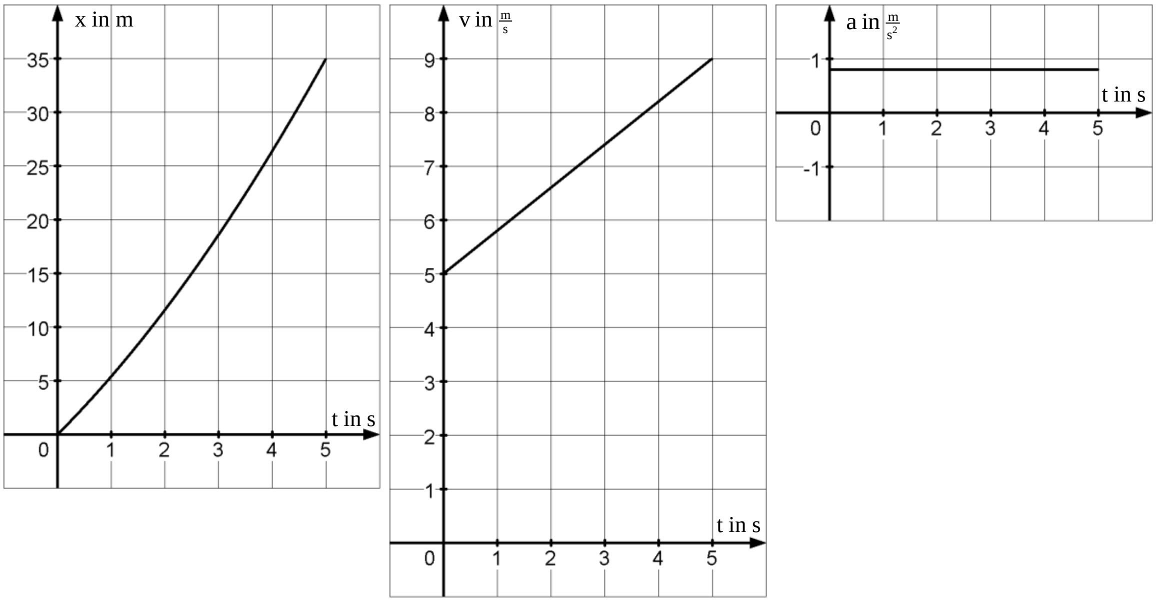
$$v^2 - v_0^2 = 2ax \overset{v_0=0}{\Rightarrow} v^2 = 2ax \Rightarrow v = \sqrt{2ax}$$
$$v = \sqrt{2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^5\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 0{,}80\,m} = 8{,}5 \cdot 10^2\,\tfrac{m}{s} \mathrel{\hat{=}} 3{,}1 \cdot 10^3\,\tfrac{km}{h}$$
$$x(t) = \underset{0}{x_0} + \underset{0}{v_0 t} + \tfrac{1}{2}at^2 \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}80\,m}{4{,}5 \cdot 10^5\,\frac{m}{s^2}}} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}\,s$$

9.0 Zeichne das t-x-, t-v- und t-a-Diagramm im Zeitintervall $0 \le t \le 5\mathrm{s}$ für eine Bewegung mit der konstanten

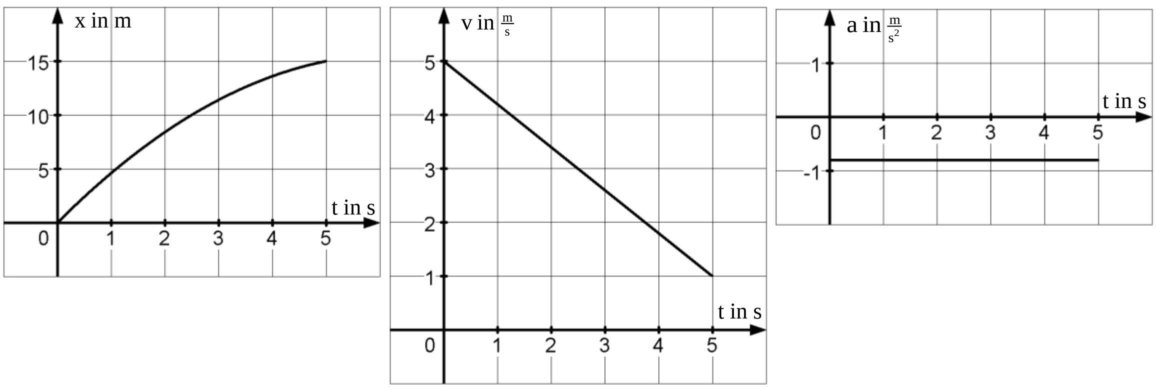
9.1 Geschwindigkeit von $5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$



9.2 Beschleunigung $0{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$



9.3 Verzögerung $0{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$



10. Ein Wagen wird gleichmäßig abgebremst und durchfährt dabei in 20s eine Strecke von $0,46\text{km}$ Länge; er hat dann die Geschwindigkeit $18\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechne die Anfangsgeschwindigkeit und die Beschleunigung des Wagens

$$x(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$v(t) = at + v_0$$

In jeder Gleichung hat man zwei Unbekannte (Gleichungssystem, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten → Mathematik!)
Man löst eine Gleichung nach einer Unbekannten auf

$$v(t) = at + v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = v - at$$

und setzt dies in die zweite Gleichung ein.

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{2}at^2 + (v - at)t \\ x &= \tfrac{1}{2}at^2 + vt - at^2 \\ x &= -\tfrac{1}{2}at^2 + vt \\ \tfrac{1}{2}at^2 &= vt - x \\ a &= \frac{2(vt - x)}{t^2} \\ a &= \frac{2\left(18\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20\,\text{s} - 460\,\text{m}\right)}{(20\,\text{s})^2} = -0,50\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

und dies nun wieder in die erste Gleichung:

$$v_0 = v - at = 18\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-0,50\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot 20\,\text{s} = 28\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

11. Ein Pkw wird von der Geschwindigkeit $65\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $5,0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gleichmäßig abgebremst; er legt dabei eine Strecke von 30m zurück. Berechne die Bremsdauer.

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = \frac{\left(5,0:3,6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(65,0:3,6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 30\,\text{m}} = -5,40\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

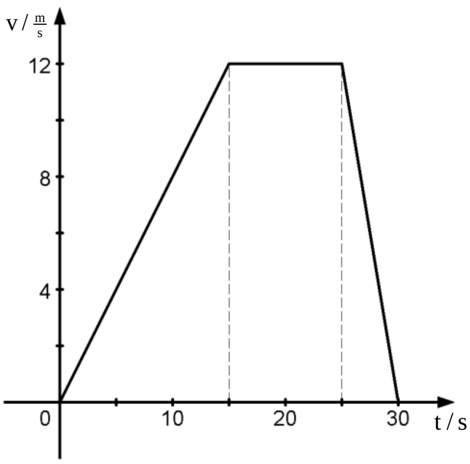
$$v(t) = at + v_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{\left(5,0:3,6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) - \left(65,0:3,6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{-5,40\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 3,1\text{s}$$

12.0 Gegeben ist folgendes t-v-Diagramm

12.1 Erkläre aus dem t-v-Diagramm den Bewegungsablauf

12.2 Zeichne nach Berechnung geeigneter Werte der Beschleunigung das t-a-Diagramm.

12.3 Zeichne nach Berechnung geeigneter Werte des Ortes das t-x-Diagramm für $x(0) = 0$



13 Der kleine Schumi katapultiert seinen BMW vom Start aus mit einer Beschleunigung von $11,0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ auf eine Geschwindigkeit von $38,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Um in die erste Kurve einzufahren muss er aber sein Auto auf eine Geschwindigkeit von $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ abbremsen. Für diesen Bremsvorgang benötigt er lediglich 50,0 Hundertstel Sekunden. Er fährt nun $1,60\text{s}$ lang mit konstanter Geschwindigkeit durch die Kurve. Am Ende der Kurve beschleunigt er sein Fahrzeug auf einer Strecke von 250m, bis er eine Geschwindigkeit von $270,0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht hat. Aufgrund eines auf der Rennstrecke stehenden Zuschauers verzögert er seinen Boliden mit $25,0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ bis er zum Stillstand kommt.

13.1 Welche Strecke vom Start aus hat Klein-Schumi zurückgelegt, wenn er genau vor dem Zuschauer zum Stehen kommt?

13.2 Wie lange hat, bis zum Stillstand seines Fahrzeuges das Rennen gedauert?

13.3 Zeichne für den Rennverlauf ein t-a, ein t-v und ein t-x-Diagramm.

14. Ein Radfahrer mit einer Geschwindigkeit von $18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ überholt ein parkendes Auto.

a) Sofort

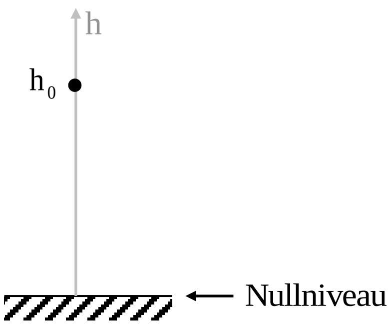
b) $15\,\text{s}$ später

fährt das Auto mit einer Beschleunigung von $0,70\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ an.

Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit überholt das Auto den Radfahrer? Welche Strecke hat das Auto bis dahin zurückgelegt? Kontrolliere die Berechnung im Zeit-Ort-Diagramm.

2.2 Der freie Fall

Der freie Fall ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.



Es gilt: $x(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ und $v(t)=at+v_0$

Man ersetzt zunächst $x(t)$ durch $h(t)$ (vgl. Koordinatenachse). Somit folgt:

$$h(t)=\tfrac{1}{2}at^2+v_0t+h_0$$

Die Anfangsgeschwindigkeit ist $v_0=0$ (da man den Körper aus der Ruhe heraus fallen lässt).
Für die Beschleunigung gilt: $a=-g=-9{,}81\frac{m}{s^2}$
(Die Beschleunigung hat einen vektoriellen Charakter und zeigt nach unten. Diese Richtung wird durch das Minuszeichen Rechnung getragen!)

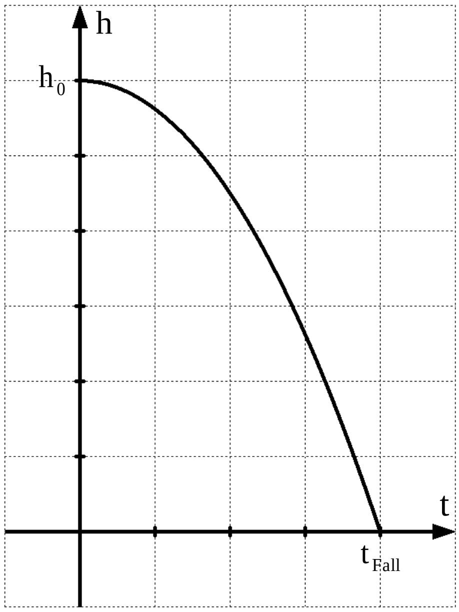
Setzt man die Erdoberfläche als Nullpunkt fest und lässt den Körper aus einer Höhe $y_0=h_0$ fallen, so folgt für die Zeit-Ortsfunktion:

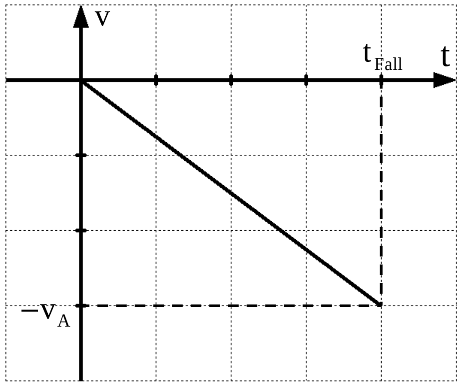
$$\boxed{h(t)=h_0-\tfrac{1}{2}gt^2}$$

und für die Zeit-Geschwindigkeitsfunktion:

$$\boxed{v(t)=-gt}$$

Das Minuszeichen bei der Zeit-Geschwindigkeitsfunktion drückt aus, dass es eine Bewegung in negativer y-Richtung ist, d.h. dass die Geschwindigkeit nach unten gerichtet ist.





Alternativ kann man auch den Ort an dem man den Körper fallen lässt als Nullpunkt festlegen: $h_0=0$

Dann folgt:

$$\boxed{h(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2}$$

Die Zeit-Geschwindigkeitsfunktion bleibt davon unverändert.

Aufgaben:

15. Ein Stein wird von einem 100m hohen Turm fallen gelassen. Wie groß ist seine Fallzeit und welche Geschwindigkeit hat er bei seinem Aufprall?

    Wählt man als Bezugsniveau die Erdoberfläche, dann gilt:

    $$h(t) = h_0 - \tfrac{1}{2}gt^2 \text{ und } v(t) = -gt$$

    Für die Fallzeit t_{Fall} gilt:

    $$h(t_{Fall}) = h_0 - \tfrac{1}{2}gt_{Fall}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}gt_{Fall}^2 = h_0 \quad \Rightarrow \quad t_{Fall} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}} = \underline{\underline{4{,}52\,s}}$$

    Für die Aufprallgeschwindigkeit v_A gilt:

    $$v_A = v(t_{Fall}) = -gt_{Fall} = -g \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = -\sqrt{2h_0 g} = -\sqrt{2 \cdot 100\,m \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = \underline{\underline{-44{,}3\,\frac{m}{s}}}$$

    Das Minuszeichen sagt aus, dass die Geschwindigkeit nach unten gerichtet ist.
    Der Betrag der Aufprallgeschwindigkeit beträgt somit: $|v_A| = 44{,}3\,\frac{m}{s}$.

16. Ein Stein wird aus einer Höhe von 50m fallen gelassen. Um wie viele Sekunden später muss man einen zweiten Stein aus einer Höhe von 25m fallen lassen, damit beide zur gleichen Zeit auf dem Boden aufschlagen?

    Für den freien Fall gilt: $h(t) = h_0 - \tfrac{1}{2}gt^2$

    $$h(t_{Fall}) = h_0 - \tfrac{1}{2}gt_{Fall}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{Fall} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

    Für die Fallzeit t_1 aus einer Höhe von $h_0 = 50\,m$ gilt: $t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 50\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}} = 3{,}2\,s$

    Für die Fallzeit t_2 aus einer Höhe von $h_0 = 25\,m$ gilt: $t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 25\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}} = 2{,}3\,s$

    Da $t_1 > t_2$ muss man den zweiten Stein aus einer Höhe von $25\,m$ um
    $\Delta t = t_1 - t_2 = 3{,}2\,s - 2{,}3\,s = 0{,}9\,s$ später fallen lassen.

2.3 Senkrechter Wurf nach oben

Der senkrechte Wurf nach oben ist ebenfalls eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Es gilt: $h(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ und $v(t) = v_0 + at$

Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist die Geschwindigkeit mit welcher der Körper senkrecht nach oben geworfen wird $(v_0 \neq 0)$.

Für die Beschleunigung gilt: $a = -g = -9{,}81\frac{m}{s^2}$

Der Ort an dem der Körper losgeworfen wird, wird als Nullpunkt gewählt: $h_0 = 0$

Es ergeben sich somit folgende Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{c} h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = v_0 - gt \end{array}}$$

Wird ein Körper von der Erdoberfläche aus senkrecht nach oben geworfen, so wird er zunächst durch seine Gewichtskraft abgebremst, seine Geschwindigkeit nimmt ab.
Seine maximale Höhe hat er nach der Zeit t_{Steig} erreicht. Dabei hat er die Geschwindigkeit $v\left(t_{Steig}\right) = 0$.

Somit folgt für die Steigzeit:

$$v(t_{Steig}) = v_0 - gt_{Steig} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{Steig} = \frac{v_0}{g}$$

Der Körper fällt nun wieder nach unten auf den Boden. Seine Geschwindigkeit nimmt weiter ab (betraglich nimmt sie natürlich wieder zu!!).
Er trifft nach der Zeit t_{Flug} wieder auf dem Boden auf, er hat somit die Höhe $h\left(t_{Flug}\right) = 0$.

Somit erhält man für die Flugzeit:

$$h\left(t_{Flug}\right) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t\left(v_0 - \frac{1}{2}gt\right) = 0$$

$$t_1 = 0 \quad (\text{Abwurfzeitpunkt!})$$

$$\text{und aus } v_0 - \frac{1}{2}gt = 0 \text{ folgt dann: } t_{Flug} = \frac{2v_0}{g}$$

Somit ist $t_{Flug} = 2 \cdot t_{Steig}$, dass heißt aber, dass die Steigzeit und die Fallzeit gleich sein müssen:

$$t_{Fall} = t_{Steig}$$

Er trifft dann mit der Geschwindigkeit

$$v\left(t_{flug}\right) = v\left(\frac{2v_0}{g}\right) = v_0 - g \cdot \frac{2v_0}{g} = -v_0$$

auf dem Boden auf.

Aufgaben:

17. Ein Stein wird mit einer Geschwindigkeit von $8,0\,\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben geworfen. Wie hoch steigt der Stein und wie lange benötig er dazu? Wie lange benötigt der Stein bis er wieder auf dem Boden aufschlägt? Mit welcher Geschwindigkeit schlägt er auf dem Boden auf?

    Für die Steigzeit t_{Steig} gilt:

    $$v(t_{Steig}) = v_0 - gt_{Steig} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{Steig} = \frac{v_0}{g} = \frac{8,0\,\frac{m}{s}}{9,81\,\frac{m}{s^2}} = 0,82\,s$$

    Daraus erhält man nun die maximale Flughöhe h_{max}:

    $$h_{max} = h(t_{Steig}) = v_0 t_{Steig} - \tfrac{1}{2} g t_{Steig}^2 = v_0 \frac{v_0}{g} - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\left(8,0\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9,81\,\frac{m}{s^2}} = 3,3\,m$$

    Für die komplette Flugzeit t_{Flug} gilt: $t_{Flug} = 2 \cdot t_{Steig} = 2 \cdot \frac{v_0}{g} = 2 \cdot \frac{8,0\,\frac{m}{s}}{9,81\,\frac{m}{s^2}} = 1,6\,s$

    Die Aufprallgeschwindigkeit beträgt $v_A = -v_0 = -8,0\,\frac{m}{s}$

18. Ein Stein wird mit einer Geschwindigkeit von $6,5\,\frac{m}{s}$ nach oben geworfen. Gleichzeitig wird ein zweiter Stein von einem Turm fallen gelassen. Wie hoch muss der Turm sein, damit beide zur gleichen Zeit auf den Boden aufprallen?

    Die Flugzeit eines Steins beim senkrechten Wurf noch oben erhält man aus der Lösung der Gleichung

    $$h(t) = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 = 0$$
    $$t \cdot \left(v_0 - \tfrac{1}{2} g t\right) = 0$$

    1. Lösung: $t_0 = 0$ (das ist der Startzeitpunkt)

    2. Lösung: $v_0 - \frac{1}{2} g t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 6,5\,\frac{m}{s}}{9,81\,\frac{m}{s^2}} = 1,3\,s$

    Die Flugzeit $t_1 = 1,3\,s$ entspricht nun genau der Fallzeit eines Steins beim freien Fall aus der Höhe h_0:

    $$h(t_1) = h_0 - \tfrac{1}{2} g t_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \tfrac{1}{2} g t_1^2 = \frac{2v_0^2}{g} = 8,6\,m$$

19. Ein Stein wird aus einer Höhe von 75m mit einer Geschwindigkeit von $18,0\,\frac{km}{h}$ senkrecht nach unten geworfen. Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Stein auf dem Boden auf und wie lange dauert der Fall?

    Es handelt sich hier um einen freien Fall mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = -18,0\,\frac{km}{h} = -5,0\,\frac{m}{s}$.

    Für die Zeit-Orts-Funktion gilt: $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

    Die Flugzeit t_{Flug} erhält man durch lösen der Gleichung:

    $$h(t) = h_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{-g} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}$$

$$t_{Flug} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} = \frac{-5{,}0\,\frac{m}{s} \mp \sqrt{\left(-5{,}0\,\frac{m}{s}\right)^2 + 2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 75m}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = \begin{cases} (-4{,}5\,s) \\ 3{,}4\,s \end{cases}$$

Für die Zeit-Geschwindigkeits-Funktion gilt: $v(t) = v_0 - gt$

Berücksichtigt man, dass die Abwurfgeschwindigkeit v_0 nach unten zeigt, also $v_0 = -5{,}0\,\frac{m}{s}$.

Dann folgt für die Aufprallgeschwindigkeit v_A:

$$v_A = v(t_{Flug}) = v_0 - gt_{Flug} = -5{,}0\,\frac{m}{s} - 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 3{,}43s = -39\,\frac{m}{s}$$

20. Ein Stein prallt nach $1{,}75s$ Fallzeit mit einer Geschwindigkeit von $12{,}0\,\frac{m}{s}$ auf den Boden auf. Aus welcher Höhe und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit wurde der Stein geworfen?

Aus der Zeit-Geschwindigkeits-Funktion $v(t) = v_0 - gt$ folgt dann für den Zeitpunkt des Aufpralls auf den Boden:

$$v(t_{Fall}) = v_0 - gt_{Fall} = v_A \quad \Rightarrow \quad v_0 = v_A + gt_{Fall} = -12{,}0\,\frac{m}{s} + 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}75s = 5{,}17\,\frac{m}{s}$$

D.h. der Körper wird mit einer Geschwindigkeit von $5{,}17\,\frac{m}{s}$ nach <u>oben</u> weggeworfen.

Die Fallhöhe h_0 erhält man aus der Zeit-Orts-Funktion $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$:

$$h(t_{Fall}) = h_0 + v_0 t_{Fall} - \tfrac{1}{2}gt_{Fall}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \tfrac{1}{2}gt_{Fall}^2 - v_0 t_{Fall}$$

$$h_0 = \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot (1{,}75s)^2 - 5{,}17\,\frac{m}{s} \cdot 1{,}75s = 5{,}97\,m$$

21. Ein Stein wird senkrecht nach oben geworfen. Nach $3{,}40s$ fällt er wieder auf den Boden. Wie hoch ist der Stein geflogen? Mit welcher Geschwindigkeit wurde er senkrecht nach oben geworfen?

Die Abwurfgeschwindigkeit erhält man aus der Zeit-Geschwindigkeits-Funktion $v(t) = v_0 - gt$, denn es gilt:

$$v(t_{Steig}) = v(\tfrac{1}{2}t_{Flug}) = v_0 - \tfrac{1}{2}gt_{Flug} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \tfrac{1}{2}gt_{Flug}$$

$$v_0 = \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 3{,}40s = 16{,}7\,\frac{m}{s}$$

Die maximale Flughöhe h_{max} hat der Stein nach der Steigzeit $t_{Steig} = \frac{1}{2}t_{Flug}$ erreicht:

$$h(t) = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$h_{max} = h(t_{Steig}) = h(\tfrac{1}{2}t_{Flug}) = \tfrac{1}{2}v_0 t_{Flug} - \tfrac{1}{2}g\left(\tfrac{1}{2}t_{Flug}\right)^2 = \tfrac{1}{4}gt_{Flug}^2 - \tfrac{1}{8}gt_{Flug}^2 = \tfrac{1}{8}gt_{Flug}^2$$

$$h_{max} = \tfrac{1}{8} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot (3{,}40s)^2 = 14{,}2\,m$$

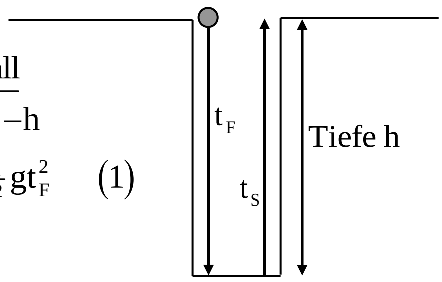
22. Man lässt einen Stein in einen Brunnen fallen. Nach $3{,}00\,\mathrm{s}$ hört man den Aufprall. Wie tief ist der Brunnen? (Schallgeschwindigkeit $v_S = 331\,\frac{m}{s}$)

$$t_F + t_S = t$$

<u>freier Fall</u>

$$h(t_F) = -\tfrac{1}{2}gt_F^2 = -h$$

$$\Rightarrow \quad h = \tfrac{1}{2}gt_F^2 \qquad (1)$$



<u>Schall</u>

$$h(t_S) = v_S t_S = h \qquad (2)$$

Da nun der Fallweg des Steines gleich dem Schallweg entspricht setzt man die beiden obigen Gleichungen gleich.

$$\tfrac{1}{2}gt_F^2 = v_S t_S$$
$$\tfrac{1}{2}gt_F^2 = v_S(t - t_F)$$
$$\tfrac{1}{2}gt_F^2 = v_S t - v_S t_F$$
$$\tfrac{1}{2}gt_F^2 + v_S t_F - v_S t = 0$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, so erhält man die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2}\cdot t_F^2 + 331\,\tfrac{m}{s}\cdot t_F - 331\,\tfrac{m}{s}\cdot 3{,}0\,s = 0$$
$$4{,}905\,\tfrac{m}{s^2}\cdot t_F^2 + 331\,\tfrac{m}{s}\cdot t_F - 993\,m = 0$$

Durch lösen dieser quadratischen Gleichung erhält man:

$$t_{F_{1/2}} = \frac{-331\,\frac{m}{s} \pm \sqrt{\left(331\,\frac{m}{s}\right)^2 - 4\cdot 4{,}905\,\frac{m}{s^2}\cdot(-993\,m)}}{2\cdot 4{,}905\,\frac{m}{s^2}} = \frac{-331\,\frac{m}{s} \pm 359{,}2\,\frac{m}{s}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = \begin{cases} 2{,}87\,s \\ (-70{,}4\,s) \end{cases}$$

Da nur die positive Lösung physikalisch sinnvoll ist, gilt für die Fallzeit:

$$t_F = 2{,}87\,s$$

Eingesetzt in die Gleichung (1) erhält man die Tiefe h des Brunnens:

$$h = \tfrac{1}{2}gt_F^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2}\cdot(2{,}87\,s)^2 \approx \underline{\underline{40{,}4\,m}}$$

23.0 Höhlenforscher kommen gelegentlich in Situationen, wo sie an einem Abbruch stehen und sich vor ihnen eine gähnende Leere auftut, die mit den mitgeführten Taschenlampen nicht ausleuchtbar ist. Hier besteht die Möglichkeit, Steine in die Tiefe fallen zu lassen und die Zeit t zwischen dem Auslassen des Steines um dem hörbaren Aufschlag des Steines zu stoppen.

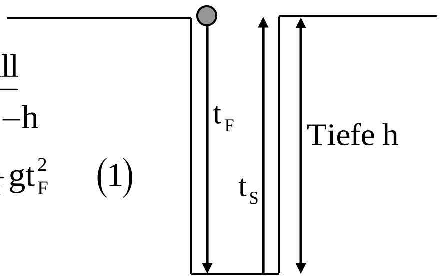
23.1 Zeige, dass die Formel zur Berechnung der Tiefe h solcher Höhlenabschnitte die Form hat: $h = \frac{v_S}{g} \cdot \left(v_S + gt - \sqrt{v_S^2 + 2gv_S t} \right)$

$$t_F + t_S = t$$

freier Fall

$$h(t_F) = -\tfrac{1}{2} g t_F^2 = -h$$

$$\Rightarrow \quad h = \tfrac{1}{2} g t_F^2 \qquad (1)$$



Schall

$$h(t_S) = v_S t_S = h \qquad (2)$$

Da nun der Fallweg des Steines gleich dem Schallweg entspricht setzt man die beiden obigen Gleichungen gleich.

$$\tfrac{1}{2} g t_F^2 = v_S t_S$$

$$\tfrac{1}{2} g t_F^2 = v_S (t - t_F)$$

$$\tfrac{1}{2} g t_F^2 = v_S t - v_S t_F$$

$$\tfrac{1}{2} g t_F^2 + v_S t_F - v_S t = 0$$

Durch lösen dieser quadratischen Gleichung erhält man:

$$t_{F_{1/2}} = \frac{-v_S \pm \sqrt{v_S^2 + 2gv_S t}}{g}$$

Die physikalisch sinnvolle Lösung ist:

$$t_F = \frac{-v_S + \sqrt{v_S^2 + 2gv_S t}}{g}$$

Diese setzt man nun in (2) ein und erhält:

$$h_0 = v_S t_S = v_S (t - t_F) = v_S \left(t - \frac{-v_S + \sqrt{v_S^2 + 2gv_S t}}{g} \right) = \frac{v_S}{g} \left(gt + v_S - \sqrt{v_S^2 + 2gv_S t} \right)$$

$$h_0 = \frac{v_S}{g} \left(v_S + gt - \sqrt{v_S^2 + 2gv_S t} \right)$$

23.2 Berechne die Tiefe h des senkrechten Absturzes , wenn zwischen dem Loslassen und dem hörbaren Aufschlagen des Steines $t = 2,9\,\text{s}$ verstreichen und eine Schallgeschwindigkeit von $v_S = 331\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ angenommen wird.

$$h_0 = \frac{331\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \left(331\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} + 9,81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,9\,\text{s} - \sqrt{\left(331\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9,81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 331\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,9\,\text{s}} \right) \approx 38\,\text{m}$$

2.4 Waagerechter Wurf

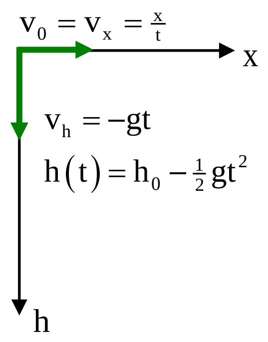
Ein Körper, der sich auf der Erde in horizontaler Richtung frei bewegt ist zwei Bewegungsarten gleichzeitig ausgesetzt.
In x-Richtung (horizontaler Richtung) bewegt sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit. Für diese Bewegung gilt die Zeit-Orts-Funktion

$$x(t) = x_0 + v_{0_x} t \overset{x_0=0}{\Rightarrow} x = v_0 t \qquad (1)$$

In h-Richtung unterliegt der Körper der Schwerkraft der Erde und wird somit aus der Ruhe heraus gleichmäßig nach unten beschleunigt (freier Fall). Für diese Bewegung gilt die Zeit-Orts-Funktion

$$h(t) = h_0 + v_{0_y} t - \tfrac{1}{2} g t^2 \underset{v_{0_y}=0}{\Rightarrow} y = h_0 - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Physikalische Experimente zeigen, dass sich diese beiden Bewegungen ungestört überlagern (→ waagerechter Wurf). D.h. die Fallbewegung wird nicht durch die Bewegung in x-Richtung gestört (und umgekehrt).
Die Flugbahn des Körper lässt sich nun mit den beiden obigen Gleichungen sehr gut beschreiben.



Aus (1) folgt: $x = v_0 t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0}$

Dies setzt man nun in (2) ein und erhält:

$$h = h_0 - \tfrac{1}{2} g t^2 = h_0 - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$$

also

$$\boxed{h = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2}$$

Diese Gleichung nennt man die Bahnkurve eines Körpers, sie beschreibt seine Flugbahn in einem x-h-Diagramm. Bei der Flugbahn handelt es sich um ein „Ast" einer nach unten geöffneten Parabel.

Die Zeit, die ein Körper auf der Flugbahn des waagrechten Wurfes zur Verfügung hat um auf dem Boden aufzutreffen entspricht der Zeit eines frei fallenden Körper.
Die Flugzeit des Körpers entspricht somit der Fallzeit des Körper, man erhält sie aus der Zeit-Orts-Funktion des freien Falls:

$$y(t) = h_0 - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$y(t_{Fall}) = h_0 - \tfrac{1}{2} g t_{Fall}^2 = 0$$
$$t_{Fall} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Das ist genau die Zeit, die dem Körper zur Verfügung steht um sich in x-Richtung zu bewegen. Somit folgt für die Wurfweite x_W:

$$x(t) = v_0 t$$

$$x_W = x(t_{Fall}) = v_0 t_{Fall} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$
$$x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Viel einfacher lässt sich die Wurfweite x_W aus der Bahngleichung herleiten (wenn diese bereits bekannt ist). Denn es gilt:

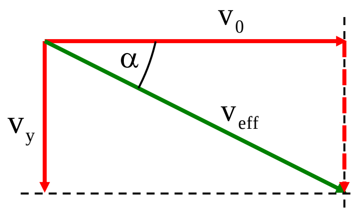
$$y = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 = 0$$

wenn der Körper auf den Boden auftrifft. Löst man diese Gleichung nach x auf, dann erhält man die Wurfweite x_W:

$$x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Die effektive Aufprallgeschwindigkeit v_{eff} des Körpers setzt sich aus der Geschwindigkeit v_0 in x-Richtung $(v_0 = \text{konst.})$ und der Geschwindigkeit v_y in y-Richtung zusammen. Für v_y gilt:

$$v(t) = -gt$$
$$v_y = v(t_{Fall}) = -g \cdot t_{Fall} = -g \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = -\sqrt{2gh_0}$$
$$v_y = -\sqrt{2gh_0}$$



$$v_{eff} = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$$

Bleibt noch der Aufprallwinkel α zu bestimmen. Es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_0} \text{ oder } \cos\alpha = \frac{v_0}{v_{eff}} \text{ oder } \sin\alpha = \frac{v_y}{v_{eff}}$$

Und jetzt noch etwas für die Wiederholer, die ja die Bedeutung der ersten Ableitung kennen sollten!

$$y(x) = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{g}{v_0^2} \cdot x \quad \text{(Die erste Ableitung nach der Variablen x)}$$

Den Aufprallwinkel α hat man dann erst nach erreichen der Wurfweite x_W.
Somit gilt:

$$\tan\alpha = y'(x_W) = -\frac{g}{v_0^2}\cdot x_W$$

Mit $x_W = v_0\cdot\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ folgt dann wieder

$$\tan\alpha = -\frac{g}{v_0^2}\cdot x_W = -\frac{g}{v_0^2}\cdot v_0\cdot\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \frac{\sqrt{2gh_0}}{v_0} = \frac{v_y}{v_0}$$

Aufgaben:

24. Ein Stein wird aus einer Höhe von 10,0m mit einer Geschwindigkeit von $5{,}0\,\frac{m}{s}$ waagrecht weggeworfen. In welcher Entfernung, vom Fußpunkt der Abwurfstelle aus, trifft der Stein auf dem Boden auf. Wie langer benötigt er für seinen Flug und mit welcher Geschwindigkeit und mit welchem Aufprallwinkel trifft der Stein auf dem Boden auf?

    Bewegung in x-Richtung: $x(t) = v_0\cdot t$

    Bewegung in y-Richtung: $y(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$ und $v_y(t) = -gt$

    Die Flugzeit t_{Flug} entspricht der Fallzeit t_{Fall} des freien Falls. Somit gilt:

$$y(t_{Flug}) = 0$$
$$h_0 - \tfrac{1}{2}gt_{Flug}^2 = 0$$
$$t_{Flug} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$
$$t_{Flug} = \sqrt{\frac{2\cdot 10{,}0\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}} \approx 1{,}43\,s$$

Die Entfernung vom Fußpunkt der Abwurfstelle entspricht der Wurfweite x_W. Für diese gilt:

$$x_W = x(t_{Flug})$$
$$x_W = v_0\cdot t_{Flug}$$
$$x_W = 5{,}0\,\tfrac{m}{s}\cdot 1{,}43\,s = 7{,}2\,\tfrac{m}{s}$$

Für die Geschwindigkeit, mit welcher er in y-Richtung auf dem Boden auftritt gilt:

$$v_y = v_y(t_{Flug})$$
$$v_y = -g\cdot t_{Flug}$$
$$v_y = -9{,}81\,\tfrac{m}{s^2}\cdot 1{,}43\,s \approx -14{,}0\,\tfrac{m}{s}$$

Somit folgt für die Aufprallgeschwindigkeit v_{eff}:

$$v_{eff} = \sqrt{v_0^2 + v_y^2}$$
$$v_{eff} = \sqrt{\left(5{,}0\,\tfrac{m}{s}\right)^2 + \left(-14{,}0\,\tfrac{m}{s}\right)^2} \approx 15\,\tfrac{m}{s}$$

und für den Aufprallwinkel α:

$$\tan\alpha = \frac{|v_y|}{v_0} = \frac{14{,}0\,\frac{m}{s}}{5{,}0\,\frac{m}{s}} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 70°$$

25. Ein Wasserstrahl tritt waagrecht aus einem Wasserschlauch aus, der sich in einer Höhe von 1,5m befindet. Das Wasser spritzt dabei 8,5m weit. Mit welcher Geschwindigkeit tritt es aus dem Wasserschlauch aus? Unter welchem Winkel trifft es auf die Erdoberfläche?

Es gilt: $h\left(t_{Flug}\right) = h_0 - \frac{1}{2}gt_{Flug}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{Flug} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5\,m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} \approx 0{,}55\,s$

und $x\left(t_{Flug}\right) = v_0 \cdot t_{Flug} = x_W \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{x_W}{t_{Flug}} = \frac{8{,}5\,m}{0{,}55\,s} \approx 15\frac{m}{s}$

$v_y = -g \cdot t_{Flug} = -9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}55\,s = -5{,}4\frac{m}{s}$

$\tan\alpha = \frac{\left|v_y\right|}{v_0} = \frac{5{,}4\frac{m}{s}}{15\frac{m}{s}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 20°$

26.0 Auf die Insel Biyadoo, auf den Malediven, soll ein lebensnotwendiges Medikament geliefert werden. Da die Insel sehr klein und auch sehr abgelegen ist wird der Transport von einem Versorgungsflugzeug übernommen. Das Medikament soll dabei so abgeworfen werden, dass es nicht ins Wasser fällt.
Der Pilot erinnert sich, dass es da eine kleine Nachbarinsel mit dem Namen Villivaru gibt, die 250m weit von Biyadoo entfernt ist. Er beabsichtigt nun die Fracht direkt über dieser Nachbarinsel so abzuwerfen, dass sie direkt auf Biyadoo ankommt. Doch er weis nicht recht in welcher Höhe er fliegen muss.

26.1 In welcher Höhe muss er fliegen, wenn die Fluggeschwindigkeit $144\frac{km}{h}$ beträgt?
(Mögliches Zwischenergebnis: $h = 200m$*)*

26.2 Wie groß ist die Aufprallgeschwindigkeit und der Aufprallwinkel?

27.0 Ein Porschefahrer fährt auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von $108\frac{km}{h}$.
Ein Vorrausfahrendes Auto beginnt plötzlich zu bremsen.

27.1 Wie groß ist der Reaktionsweg, denn der Fahrer in der sogenannten Schrecksekunde zurücklegt?

27.2 Wie groß ist sein Anhalteweg, wenn er sein Fahrzeug mit einer durchschnittlichen Verzögerung von $9{,}1\frac{m}{s^2}$ abbremst?

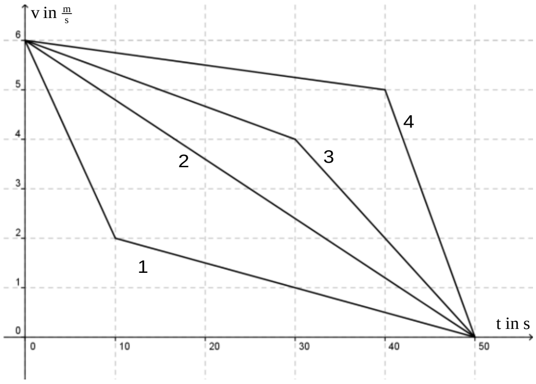
28.0 $\text{Anhalteweg} = \text{Reaktionsweg} + \text{Bremsweg}$

28.1 Zeige: Im Vergleich zu einer Fahrt mit der Geschwindigkeit von $50\frac{km}{h}$ verdoppelt sich bei $70\frac{km}{h}$ der Bremsweg.

28.2 Wo der $50\frac{km}{h}$-Fahrer zum Stehen kommt, fährt der $70\frac{km}{h}$-Fahrer noch mit welcher Geschwindigkeit?

Ergänzende Aufgaben:

29.0 Das folgende t-v-Diagramm zeigt die Bewegung von vier Autos.



29.1 Welche der folgenden Aussagen sind richtig. Begründen Sie kurz ihre Antwort.

- Jedes Fahrzeug hat die gleiche Anfangsgeschwindigkeit.
- Die Fahrzeiten der Fahrzeuge sind gleich.
- Die Geschwindigkeit nimmt in allen vier Fällen ab.
- Jede Bewegung ist eine gleichmäßige Verzögerung.

29.2 Begründen Sie zunächst ohne Rechnung, welches Fahrzeug den kürzesten Bremsweg hat. Berechnen Sie den Bremsweg der vier Fahrzeuge.

30.0 Ein Körper wird aus der Höhe h_0 fallen gelassen.

30.1 Zeigen Sie, dass dieser Körper die erste Hälfte der Strecke in einer Zeit von $t_1 = \sqrt{\frac{h_0}{g}}$ zurücklegt.

Für den freien Fall gilt: $h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$

Für die Flugzeit t_1 der ersten hälfte der Strecke h_0 gilt dann:

$$h(t_1) = h_0 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 = \tfrac{1}{2}h_0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}gt_1^2 = \tfrac{1}{2}h_0 \quad \Rightarrow \quad t_1^2 = \frac{h_0}{g} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{h_0}{g}}$$

30.2 Ermitteln Sie, welchen prozentualen Anteil die Flugzeit der zweiten Hälfte der Strecke in Bezug auf die gesamte Fallzeit ausmacht.

Für die Fallzeit t_F gilt: $h(t_F) = h_0 - \frac{1}{2}gt_F^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}gt_F^2 = h_0 \quad \Rightarrow \quad t_F^2 = \frac{2h_0}{g} \quad \Rightarrow t_F = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

Somit folgt für den prozentualen Anteil der Flugzeit t_2 der zweiten Hälfte der Strecke:

$$\frac{t_2}{t_F} = \frac{t_F - t_1}{t_F} = 1 - \frac{t_1}{t_F} = 1 - \frac{\sqrt{\frac{h_0}{g}}}{\sqrt{\frac{2h_0}{g}}} = 1 - \frac{\sqrt{\frac{h_0}{g}}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{h_0}{g}}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \underline{\underline{29{,}3\%}}$$