§ 2 Bewegung mit konstanter Beschleunigung

2.1 Gleichmäßige Beschleunigung eines Massenpunktes

Verändert sich die Geschwindigkeit eines Körpers mit der Zeit, so sagt man, er führe eine beschleunigte Bewegung aus. Ein Maß dafür ist die Beschleunigung a, die sich aus dem Quotienten der Geschwindigkeitsveränderung Δv und der dafür benötigten Zeit Δt ergibt.

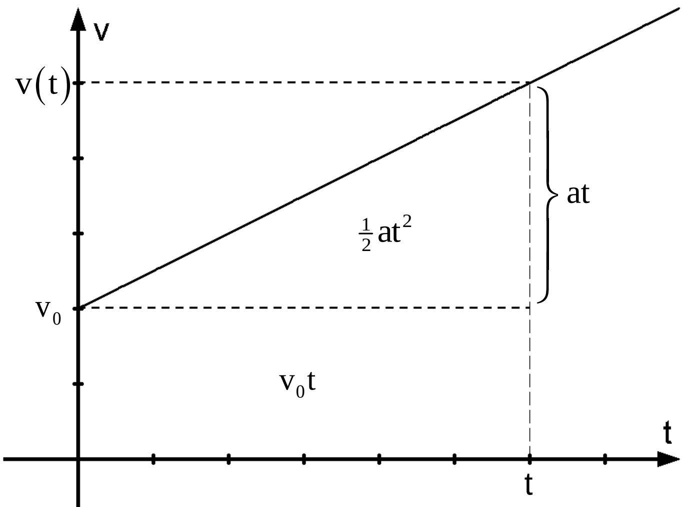
$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad [a] = \frac{m}{s^2}$$

Durch Umformung erhält man:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$\Delta t \cdot a = \Delta v$$
$$(t_1 - t_0) \cdot a = v_1 - v_0 \qquad \text{mit } t_0 = 0$$
$$a \cdot t_1 = v_1 - v_0$$
$$v_1 = a \cdot t_1 + v_0$$

$$\boxed{v(t) = a \cdot t + v_0} \qquad \boxed{\text{Zeit-Geschwindigkeitsfunktion}}$$

Die Zeit-Geschwindigkeitsfunktion im t-v-Diagramm ist somit eine Gerade deren Steigung der Beschleunigung a entspricht und der y-Achsenabschnitt die Anfangsgeschwindigkeit v_0 angibt:



Der in der Zeit t zurückgelegte Weg entspricht (wie schon bei der gleichförmigen Bewegung) der Fläche, die vom Graph der Zeit-Geschwindigkeitsfunktion und der t-Achse eingeschlossen wird.

$$x = A_{\text{Rechteck}} + A_{\text{Dreieck}} = v_0 t + \tfrac{1}{2}\left(v(t) - v_0\right)t$$

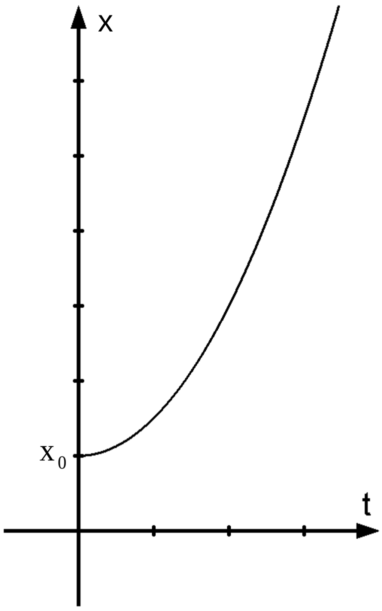
setzt man $v((t)) = a \cdot t + v_0$ ein, so folgt dann:

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}(a \cdot t + v_0 - v_0)t$$
$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a \cdot t \cdot t$$
$$\Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

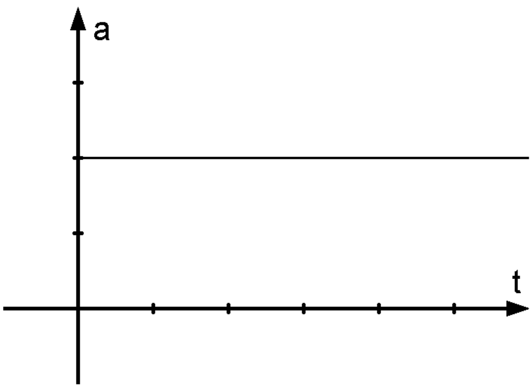
Hat der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ vom Koordinatenursprung die Entfernung x_0, so folgt:

$$\boxed{x(t) = \tfrac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0} \qquad \boxed{\text{Zeit-Ortsfunktion}}$$

Der Graph der Zeit-Ortsfunktion ist somit eine Parabel.



Für die Zeit Beschleunigungsfunktion gilt: $a(t) = a = \text{konst.}$
Ihr Graph ist eine parallele zur Zeit-Achse



Ausgehend von den Gleichungen:

$$x(t) = \tfrac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$
$$v(t) = at + v_0$$

lässt sich noch eine zeitfreie Gleichung herleiten. Zunächst setzen wir der Einfachheit halber $x_0 = 0$ und lösen die Zeit-Geschwindigkeitsfunktion nach t auf.

$$v(t) = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad t = \tfrac{v - v_0}{a}$$

und setzt dies in die Zeit-Ortsfunktion $x(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ ein. Man erhält:

$$x=\tfrac{1}{2}a\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2+v_0\,\frac{v-v_0}{a}$$

$$x=\tfrac{1}{2}a\cdot\frac{(v-v_0)^2}{a^2}+v_0\,\frac{v-v_0}{a}$$

$$x=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(v-v_0)^2}{a}+v_0\,\frac{v-v_0}{a}$$

$$x=\frac{v-v_0}{a}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot(v-v_0)+v_0\right)$$

$$x=\frac{v-v_0}{a}\cdot\left(\tfrac{1}{2}v-\tfrac{1}{2}v_0+v_0\right)$$

$$x=\frac{v-v_0}{a}\cdot\left(\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{2}v_0\right)$$

$$x=\frac{v-v_0}{2a}\cdot(v+v_0)$$

$$x=\frac{1}{2a}\left(v^2-v_0^2\right)$$

Macht man das ganze bruchfrei, so erhält man:

$$\boxed{v^2-v_0^2=2ax}$$

Aufgaben:

1. Beim Testen verschiedener Pkws wurden diese von
   a) 0 auf $80\,\frac{km}{h}$ in $8{,}0s$
   b) 0 auf $100\,\frac{km}{h}$ in $12{,}3s$
   c) $80\,\frac{km}{h}$ auf $120\,\frac{km}{h}$ in $15{,}5s$ (im fünften Gang)
   gebracht. Ermitteln Sie, welches Fahrzeug die größte Beschleunigung besitzt.

2. Eine Lokomotive erhält aus dem Stillstand eine konstante Beschleunigung von $0{,}750\,\frac{m}{s^2}$. Berechnen Sie, nach welcher Zeit sie die Geschwindigkeit $65{,}0\,\frac{km}{h}$ erreicht hat?

3. Ein Geschoss verlässt ein $3{,}00\,m$ langes Geschützrohr mit der Mündungsgeschwindigkeit $v=700\,\frac{m}{s}$. Es soll vereinfachend angenommen werden, dass die Bewegung im Rohr eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist.
   Berechnen Sie die Beschleunigungsdauer des Geschosses im Rohr.

4.0 Ein Verkehrsflugzeug startet. Nach der Rollstrecke $s=2{,}60\,km$ hebt es mit der Fluggeschwindigkeit $v=340\,\frac{km}{h}$ vom Boden ab. Es soll angenommen werden, dass es sich bei diesem Vorgang um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung handelt.

4.1 Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung des Flugzeugs.

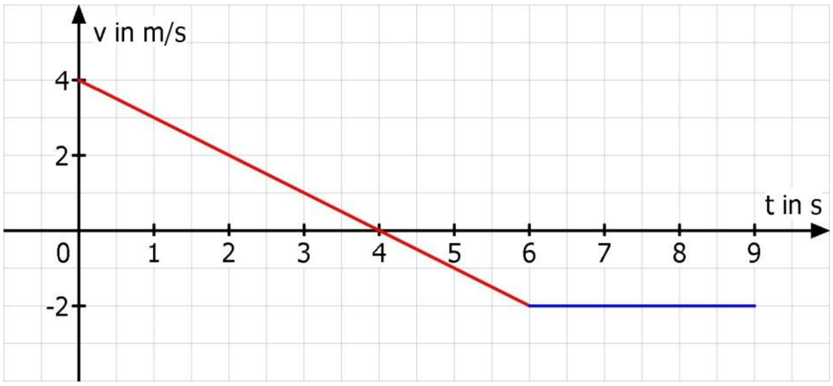
4.2 Berechnen Sie die (zeitliche) Länge des Startvorgangs.

5.0 Eine U-Bahn fährt mit einer konstanten Beschleunigung von $0{,}8\,\frac{m}{s^2}$ an. Die Zeitzählung beginnt bei der Ortsmarke Null.

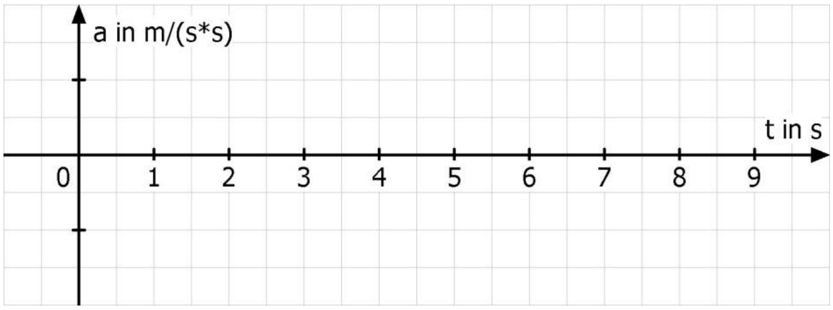
5.1 Geben Sie die Zeit-Orts-Funktion, die Zeit-Geschwindigkeits-Funktion und die Zeit-Beschleunigungsfunktion für die Bewegung an.

5.2 Zeichnen Sie das t-x-Diagramm, das t-v-Diagramm und das t-a-Diagramm für $0 \le t \le 5\,s$.

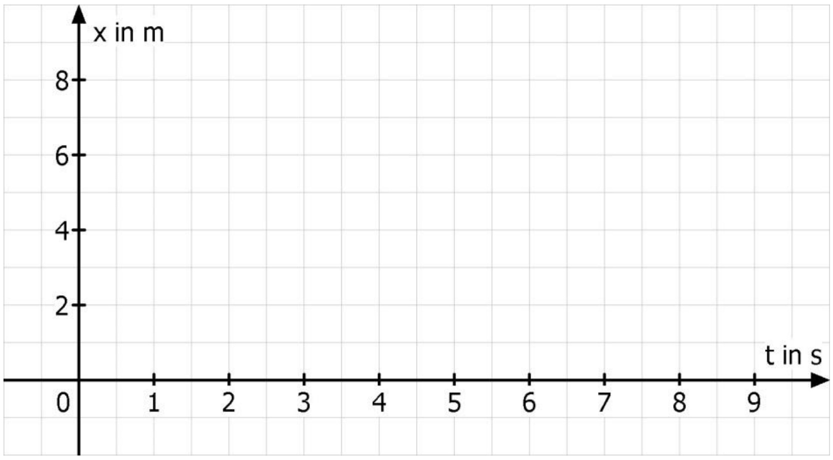
6.0 Gegeben ist das nebenstehende t-v-Diagramm eines Massenpunkts. Zum Zeitpunkt t = 0s befindet er sich am Ort $x = 1{,}0\,m$.



6.1 Ermitteln Sie das zugehörige t-x- und t-a-Diagramm. Geben Sie für $0 \le t \le 6\,s$ für jede volle Sekunde einen x-Wert an!



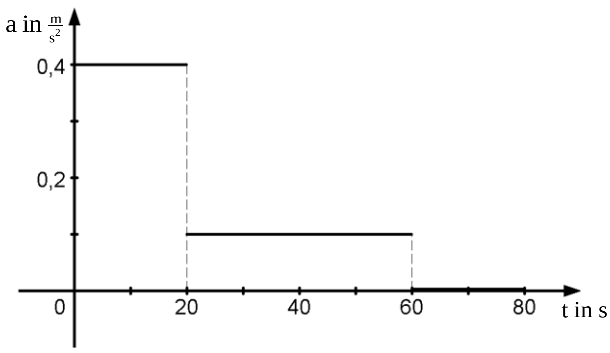
6.2 Geben Sie die Bewegungsgleichungen $v(t)$ und $x(t)$ in Form von Zahlenwertgleichungen jeweils für das Zeitintervall t < 6,0s an.



7.0 Ein Zug fährt an. Die Abhängigkeit seiner mittleren Beschleunigung von der Zeit gibt folgendes Diagramm an.

7.1 Berechne die Geschwindigkeiten, die der Zug nach 20s, 60s und 80s hat, und zeichne auch das t-v-Diagramm.

7.2 Berechne mithilfe des t-v-Diagramms den zurückgelegten Weg für die gleichen Zeitpunkte.



8.0 Zu Versuchszwecken wird eine $8{,}0\,\text{mm}$ dicke Platte aus einem neuen Faserverbundwerkstoff mit einem Stahlgeschoss (senkrecht zur Oberfläche) beschossen. Das Geschoss tritt vorne mit einer Geschwindigkeit von $700\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ein, wird im Material gleichmäßig verzögert und tritt auf der Rückseite mit einer Geschwindigkeit von $150\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ wieder aus.

8.1 Berechnen Sie die Zeit die das Geschoss im Material unterwegs war.

8.2 Berechnen Sie die Mindestdicke der Platte so, dass das Stahlgeschoss auf der Rückseite gerade zur Ruhe kommt.

8.3 Zeichnen Sie (qualitativ) das t-v-Diagramm und direkt darunter das t-x-Diagramm für den Fall 8.1 für die Zeit $-5\mu\text{s} \le t \le 23\mu\text{s}$.

8.4 Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit bei 8.1.

9.0 Zeichne das t-x-, t-v- und t-a-Diagramm im Zeitintervall $0 \le t \le 5\text{s}$ für eine Bewegung mit der konstanten

9.1 Geschwindigkeit von $5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

9.2 Beschleunigung $0{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

9.3 Verzögerung $0{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

10. Ein Wagen wird gleichmäßig abgebremst und durchfährt dabei in einer Zeit von $20\,\text{s}$ eine Strecke von $0{,}46\,\text{km}$ Länge; er hat dann die Geschwindigkeit $18\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit und die Beschleunigung des Wagens.

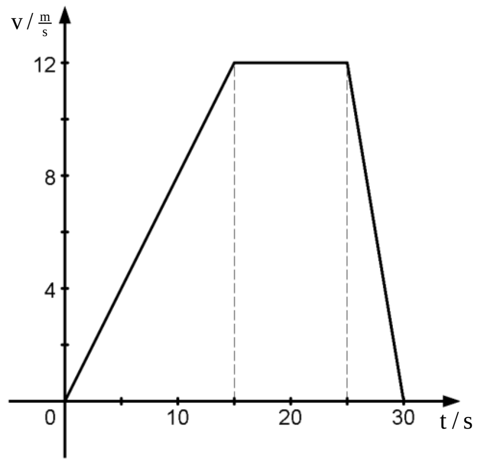
11. Ein Pkw wird von der Geschwindigkeit $65\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $5{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gleichmäßig abgebremst. Berechnen Sie die Bremsdauer, wenn er dabei eine Strecke von $30\,\text{m}$ zurück legt.

12.0 Gegeben ist folgendes t-v-Diagramm

12.1 Erkläre aus dem t-v-Diagramm den Bewegungsablauf

12.2 Zeichne nach Berechnung geeigneter Werte der Beschleunigung das t-a-Diagramm.

12.3 Zeichne nach Berechnung geeigneter Werte des Ortes das t-x-Diagramm für $x(0) = 0$



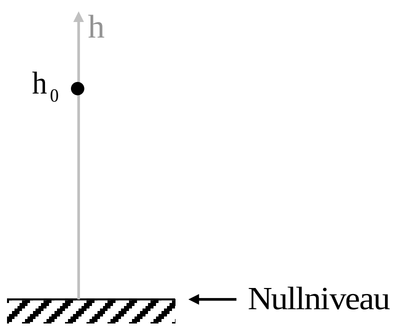
13 Der kleine Schumi katapultiert seinen BMW vom Start aus mit einer Beschleunigung von $11{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ auf eine Geschwindigkeit von $38{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Um in die erste Kurve einzufahren muss er aber sein Auto auf eine Geschwindigkeit von $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ abbremsen. Für diesen Bremsvorgang benötigt er lediglich 50,0 Hundertstel Sekunden. Er fährt nun $1{,}60\,\text{s}$ lang mit konstanter Geschwindigkeit durch die Kurve. Am Ende der Kurve beschleunigt er sein Fahrzeug auf einer Strecke von 250m, bis er eine Geschwindigkeit von $270{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht hat. Aufgrund eines auf der Rennstrecke stehenden Zuschauers verzögert er seinen Boliden mit $25{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ bis er zum Stillstand kommt.

13.1 Welche Strecke vom Start aus hat Klein-Schumi zurückgelegt, wenn er genau vor dem Zuschauer zum Stehen kommt?
13.2 Wie lange hat, bis zum Stillstand seines Fahrzeuges das Rennen gedauert?
13.3 Zeichne für den Rennverlauf ein t-a, ein t-v und ein t-x-Diagramm.

14.0 Vor einem Schnellzug, der mit der Geschwindigkeit $v_S = 144\frac{km}{h}$ dahinfährt, taucht plötzlich aus dem Nebel in $1{,}00\,km$ Entfernung ein Güterzug auf, der in derselben Richtung mit $v_G = 36{,}0\frac{km}{h}$ fährt. Der Schnellzug bremst (mit konstanter Verzögerung) und würde so ohne Hindernis nach einer Strecke von $4{,}00\,km$ zum Stehen kommen.
14.1 Berechnen Sie den Betrag der Dauer des Bremsvorgangs.
14.2 Zeigen Sie, dass es zum Zusammenstoß kommt !
Berechnen Sie dann den Betrag von Zeit und Ort des Zusammenstoßes mit Hilfe der Bewegungsgleichungen!
(Hinweis: Hier dürfen Sie ohne allgemeine Lösung mit reinen Zahlenwertgleichungen rechnen)
14.3 Verdeutlichen Sie den Vorgang in einem t-x-Diagramm!
(Maßstab: t-Achse: $200\,s \triangleq 8\,cm$ und x-Achse: $4\,km \triangleq 8\,cm$)!
Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle für die Zeitpunkte $t \in \{0\,s; 50\,s; 100\,s; 150\,s; 200\,s\}$.
Zeichnen Sie in einem beliebigen Maßstab das t-v-Diagramm für den Vorgang (ohne Wertetabelle)!
14.4 Berechnen Sie die Geschwindigkeit Δv mit der der Schnellzug dem Güterzug drauffährt.

2.2 Der freie Fall

Der freie Fall ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.



Es gilt: $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ und $v(t) = at + v_0$

Man ersetzt zunächst $x(t)$ durch $h(t)$ (vgl. Koordinatenachse). Somit folgt:

$$h(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + h_0$$

Die Anfangsgeschwindigkeit ist $v_0 = 0$ (da man den Körper aus der Ruhe heraus fallen lässt).
Für die Beschleunigung gilt: $a = -g = -9{,}81\frac{m}{s^2}$
(Die Beschleunigung hat einen vektoriellen Charakter und zeigt nach unten. Diese Richtung wird durch das Minuszeichen Rechnung getragen!)

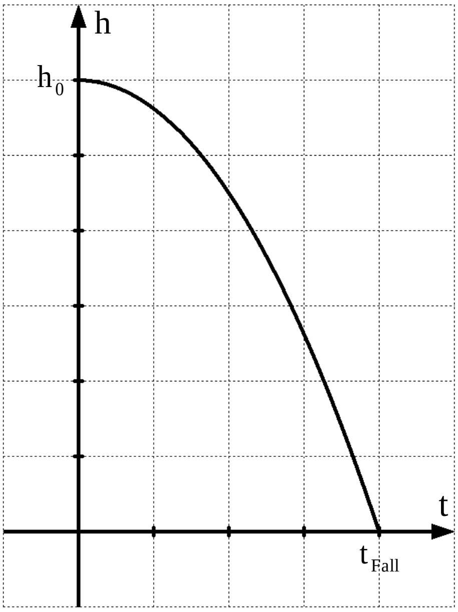
Setzt man die Erdoberfläche als Nullpunkt fest und lässt den Körper aus einer Höhe $y_0 = h_0$ fallen, so folgt für die Zeit-Ortsfunktion:

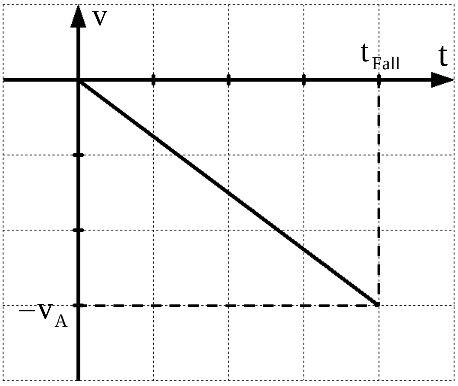
$$\boxed{h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2}$$

und für die Zeit-Geschwindigkeitsfunktion:

$$\boxed{v(t) = -gt}$$

Das Minuszeichen bei der Zeit-Geschwindigkeitsfunktion drückt aus, dass es eine Bewegung in negativer y-Richtung ist, d.h. dass die Geschwindigkeit nach unten gerichtet ist.





Alternativ kann man auch den Ort an dem man den Körper fallen lässt als Nullpunkt festlegen: $h_0 = 0$
Dann folgt:

$$\boxed{h(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2}$$

Die Zeit-Geschwindigkeitsfunktion bleibt davon unverändert.

Aufgaben:

15. Ein Stein wird von einem $100\,\mathrm{m}$ hohen Turm fallen gelassen. Berechnen Sie seine Fallzeit und seine Geschwindigkeit mit welcher er am Boden aufprallt.
16. Ein Stein wird aus einer Höhe von $50\,\mathrm{m}$ fallen gelassen. Ermitteln Sie, um wie viele Sekunden später man einen zweiten Stein aus einer Höhe von 25m fallen lassen muss, damit beide zur gleichen Zeit auf dem Boden aufschlagen?

2.3 Senkrechter Wurf nach oben

Der senkrechte Wurf nach oben ist ebenfalls eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Es gilt: $h(t) = h_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$ und $v(t) = v_0 + at$

Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist die Geschwindigkeit mit welcher der Körper senkrecht nach oben geworfen wird $(v_0 \neq 0)$.
Für die Beschleunigung gilt: $a = -g = -9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Der Ort an dem der Körper losgeworfen wird, wird als Nullpunkt gewählt: $h_0 = 0$

Es ergeben sich somit folgende Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{c} h(t) = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = v_0 - g t \end{array}}$$

Wird ein Körper von der Erdoberfläche aus senkrecht nach oben geworfen, so wird er zunächst durch seine Gewichtskraft abgebremst, seine Geschwindigkeit nimmt ab.
Seine maximale Höhe hat er nach der Zeit t_{Steig} erreicht. Dabei hat er die Geschwindigkeit $v(t_{Steig}) = 0$.
Somit folgt für die Steigzeit:

$$v(t_{Steig}) = v_0 - g t_{Steig} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{Steig} = \frac{v_0}{g}$$

Der Körper fällt nun wieder nach unten auf den Boden. Seine Geschwindigkeit nimmt weiter ab (betraglich nimmt sie natürlich wieder zu!!).
Er trifft nach der Zeit t_{Flug} wieder auf dem Boden auf, er hat somit die Höhe $h(t_{Flug}) = 0$.
Somit erhält man für die Flugzeit:

$$h(t_{Flug}) = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$t\left(v_0 - \tfrac{1}{2} g t\right) = 0$$

$$t_1 = 0 \quad (\text{Abwurfzeitpunkt!})$$

$$\text{und aus } v_0 - \tfrac{1}{2} g t = 0 \text{ folgt dann: } t_{Flug} = \frac{2 v_0}{g}$$

Somit ist $t_{Flug} = 2 \cdot t_{Steig}$, dass heißt aber, dass die Steigzeit und die Fallzeit gleich sein müssen:

$$t_{Fall} = t_{Steig}$$

Er trifft dann mit der Geschwindigkeit

$$v(t_{flug}) = v\left(\tfrac{2 v_0}{g}\right) = v_0 - g \cdot \tfrac{2 v_0}{g} = -v_0$$

auf dem Boden auf.

Aufgaben:

17. Ein Stein wird mit einer Geschwindigkeit von $8{,}0\,\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben geworfen.
Wie hoch steigt der Stein und wie lange benötig er dazu? Wie lange benötigt der Stein bis er wieder auf dem Boden aufschlägt? Mit welcher Geschwindigkeit schlägt er auf dem Boden auf?

18. Ein Stein wird mit einer Geschwindigkeit von $6{,}5\,\frac{m}{s}$ nach oben geworfen. Gleichzeitig wird ein zweiter Stein von einem Turm fallen gelassen. Wie hoch muss der Turm sein, damit beide zur gleichen Zeit auf den Boden aufprallen?

19. Ein Stein wird aus einer Höhe von 75m mit einer Geschwindigkeit von $18{,}0\,\frac{km}{h}$ senkrecht nach unten geworfen. Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Stein auf dem Boden auf und wie lange dauert der Fall?

20. Ein Stein prallt nach $1{,}75s$ Fallzeit mit einer Geschwindigkeit von $12{,}0\,\frac{m}{s}$ auf den Boden auf. Aus welcher Höhe und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit wurde der Stein geworfen?

21. Ein Stein wird senkrecht nach oben geworfen. Nach $3{,}40s$ fällt er wieder auf den Boden. Wie hoch ist der Stein geflogen? Mit welcher Geschwindigkeit wurde er senkrecht nach oben geworfen?

22. Man lässt einen Stein in einen Brunnen fallen. Nach $3{,}00s$ hört man den Aufprall. Wie tief ist der Brunnen? (Schallgeschwindigkeit $v_S = 331\,\frac{m}{s}$)

23.0 Höhlenforscher kommen gelegentlich in Situationen, wo sie an einem Abbruch stehen und sich vor ihnen eine gähnende Leere auftut, die mit den mitgeführten Taschenlampen nicht ausleuchtbar ist. Hier besteht die Möglichkeit, Steine in die Tiefe fallen zu lassen und die Zeit t zwischen dem Auslassen des Steines um dem hörbaren Aufschlag des Steines zu stoppen.

23.1 Zeige, dass die Formel zur Berechnung der Tiefe h solcher Höhlenabschnitte die Form hat: $h = \frac{v_S}{g} \cdot \left(v_S + gt - \sqrt{v_S^2 + 2gv_S t} \right)$

23.2 Berechne die Tiefe h des senkrechten Absturzes , wenn zwischen dem Loslassen und dem hörbaren Aufschlagen des Steines $t = 2{,}9s$ verstreichen und eine Schallgeschwindigkeit von $v_S = 331\,\frac{m}{s}$ angenommen wird.

2.4 Waagerechter Wurf

Ein Körper, der sich auf der Erde in horizontaler Richtung frei bewegt ist zwei Bewegungsarten gleichzeitig ausgesetzt.
In x-Richtung (horizontaler Richtung) bewegt sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit. Für diese Bewegung gilt die Zeit-Orts-Funktion

$$x(t) = x_0 + v_{0_x} t \overset{x_0=0}{\Rightarrow} x = v_0 t \qquad (1)$$

In y-Richtung unterliegt der Körper der Schwerkraft der Erde und wird somit aus der Ruhe heraus gleichmäßig nach unten beschleunigt (freier Fall). Für diese Bewegung gilt die Zeit-Orts-Funktion

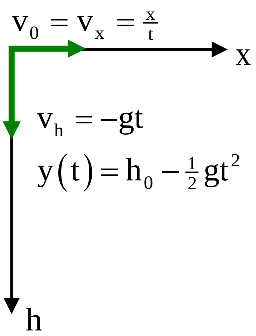
$$y(t) = h_0 + v_{0_y} t - \tfrac{1}{2} g t^2 \underset{v_{0_y}=0}{\Rightarrow} y = h_0 - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Physikalische Experimente zeigen, dass sich diese beiden Bewegungen ungestört überlagern (→ waagerechter Wurf). D.h. die Fallbewegung wird nicht durch die Bewegung in x-Richtung gestört (und umgekehrt).
Die Flugbahn des Körper lässt sich nun mit den beiden obigen Gleichungen sehr gut beschreiben.

Aus (1) folgt: $x = v_0 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0}$

Dies setzt man nun in (2) ein und erhält:

$$y = h_0 - \tfrac{1}{2} g t^2 = h_0 - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$$



also

$$\boxed{y = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2}$$

Diese Gleichung nennt man die Bahnkurve eines Körpers, sie beschreibt seine Flugbahn in einem x-h-Diagramm. Bei der Flugbahn handelt es sich um ein „Ast“ einer nach unten geöffneten Parabel.

Die Zeit, die ein Körper auf der Flugbahn des waagrechten Wurfes zur Verfügung hat um auf dem Boden aufzutreffen entspricht der Zeit eines frei fallenden Körper.
Die Flugzeit des Körpers entspricht somit der Fallzeit des Körper, man erhält sie aus der Zeit-Orts-Funktion des freien Falls:

$$y(t) = h_0 - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$y(t_{Fall}) = h_0 - \tfrac{1}{2} g t_{Fall}^2 = 0$$
$$t_{Fall} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Das ist genau die Zeit, die dem Körper zur Verfügung steht um sich in x-Richtung zu bewegen. Somit folgt für die Wurfweite x_W:

$$x(t) = v_0 t$$
$$x_W = x(t_{Fall}) = v_0 t_{Fall} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$
$$x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Viel einfacher lässt sich die Wurfweite x_W aus der Bahngleichung herleiten (wenn diese bereits bekannt ist). Denn es gilt:

$$y = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 = 0$$

wenn der Körper auf den Boden auftrifft. Löst man diese Gleichung nach x auf, dann erhält man die Wurfweite x_W:

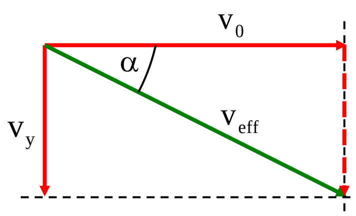
$$x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Die effektive Aufprallgeschwindigkeit v_{eff} des Körpers setzt sich aus der Geschwindigkeit v_0 in x-Richtung $(v_0 = \text{konst.})$ und der Geschwindigkeit v_y in y-Richtung zusammen. Für v_y gilt:

$$v(t) = -gt$$

$$v_y = v(t_{Fall}) = -g \cdot t_{Fall} = -g \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = -\sqrt{2gh_0}$$

$$v_y = -\sqrt{2gh_0}$$



$$v_{eff} = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$$

Bleibt noch der Aufprallwinkel α zu bestimmen. Es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_0} \text{ oder } \cos\alpha = \frac{v_0}{v_{eff}} \text{ oder } \sin\alpha = \frac{v_y}{v_{eff}}$$

Und jetzt noch etwas für die Wiederholer, die ja die Bedeutung der ersten Ableitung kennen sollten!

$y(x) = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{g}{v_0^2} \cdot x$ (Die erste Ableitung nach der Variablen x)

Den Aufprallwinkel α hat man dann erst nach erreichen der Wurfweite x_W.
Somit gilt:

$$\tan\alpha = y'(x_W) = -\frac{g}{v_0^2} \cdot x_W$$

Mit $x_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ folgt dann wieder

$$\tan\alpha = -\frac{g}{v_0^2} \cdot x_W = -\frac{g}{v_0^2} \cdot v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \frac{\sqrt{2gh_0}}{v_0} = \frac{v_y}{v_0}$$

Noch zwei Videos
Video 1
Video 2

Aufgaben:

24. Ein Stein wird aus einer Höhe von 10,0m mit einer Geschwindigkeit von $5{,}0\,\frac{m}{s}$ waagrecht weggeworfen. In welcher Entfernung, vom Fußpunkt der Abwurfstelle aus, trifft der Stein auf dem Boden auf. Wie langer benötigt er für seinen Flug und mit welcher Geschwindigkeit und mit welchem Aufprallwinkel trifft der Stein auf dem Boden auf?

25. Ein Wasserstrahl tritt waagrecht aus einem Wasserschlauch aus, der sich in einer Höhe von 1,5m befindet. Das Wasser spritzt dabei 8,5m weit. Mit welcher Geschwindigkeit tritt es aus dem Wasserschlauch aus? Unter welchem Winkel trifft es auf die Erdoberfläche?

26.0 Auf die Insel Biyadoo, auf den Malediven, soll ein lebensnotwendiges Medikament geliefert werden. Da die Insel sehr klein und auch sehr abgelegen ist wird der Transport von einem Versorgungsflugzeug übernommen. Das Medikament soll dabei so abgeworfen werden, dass es nicht ins Wasser fällt.
Der Pilot erinnert sich, dass es da eine kleine Nachbarinsel mit dem Namen Villivaru gibt, die 250m weit von Biyadoo entfernt ist. Er beabsichtigt nun die Fracht direkt über dieser Nachbarinsel so abzuwerfen, dass sie direkt auf Biyadoo ankommt. Doch er weis nicht recht in welcher Höhe er fliegen muss.

26.1 In welcher Höhe muss er fliegen, wenn die Fluggeschwindigkeit $144\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt?
(Mögliches Zwischenergebnis: $h = 200\text{m}$*)*

26.2 Wie groß ist die Aufprallgeschwindigkeit und der Aufprallwinkel?

27.0 Ein Porschefahrer fährt auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von $108\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Ein Vorrausfahrendes Auto beginnt plötzlich zu bremsen.

27.1 Wie groß ist der Reaktionsweg, denn der Fahrer in der sogenannten Schrecksekunde zurücklegt?

27.2 Wie groß ist sein Anhalteweg, wenn er sein Fahrzeug mit einer durchschnittlichen Verzögerung von $9{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ abbremst?

28.0 $\text{Anhalteweg} = \text{Reaktionsweg} + \text{Bremsweg}$

28.1 Zeige: Im Vergleich zu einer Fahrt mit der Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ verdoppelt sich bei $70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ der Bremsweg.

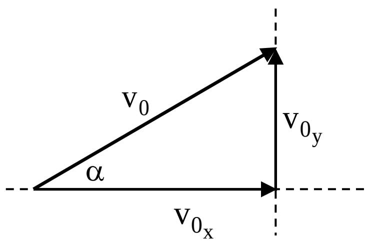
28.2 Wo der $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-Fahrer zum Stehen kommt, fährt der $70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-Fahrer noch mit welcher Geschwindigkeit?

2.5 Schiefer Wurf

Erfolgt der Abwurf nicht senkrecht oder waagrecht sondern unter einem bestimmten Abwurfwinkel α, spricht von einem schiefen oder schrägen Wurf.
Auch beim schiefen Wurf überlagern sich die gleichförmige Bewegung in horizontaler Richtung mit der beschleunigten Bewegung des senkrechten Wurfs (nach oben oder unten).
Die Abwurfgeschwindigkeit v_0 muss hier in eine horizontale Komponente v_{0_x} und eine vertikale Komponenten v_{0_y} zerlegt werden. Dabei gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{v_{0_y}}{v_0} \quad \Rightarrow \quad v_{0_y} = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{v_{0_x}}{v_0} \quad \Rightarrow \quad v_{0_x} = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$



Für die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_{0_x} in x-Richtung gilt dann:

$$x(t) = v_{0_x} \cdot t \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \qquad (1)$$

Und für die Bewegung in y-Richtung (senkrechter Wurf!) gilt mit der Abwurfhöhe h_0:

$$y(t) = \tfrac{1}{2} a t^2 + v_{0_y} t + y_0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + h_0 \qquad (2)$$

$$v_y(t) = -g \cdot t + v_{0_y} \quad \Rightarrow \quad v_y(t) = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

Nun löst man Gleichung (1) nach t auf:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$$

und ersetzt damit t in Gleichung (2):

$$y = -\tfrac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} + h_0$$

$$y = -\tfrac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x + h_0$$

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + h_0 \qquad (\text{Flugbahn beim schiefen Wurf})$$

Somit lässt sich folgern, dass die Flugbahn auch beim schiefen Wurf parabelförmig verläuft.

Beispiel: Beim Kugelstoßen wird eine Metallkugel der Masse $m = 4,0\,\text{kg}$ aus einer Höhe von $h_0 = 1,70\,\text{m}$ unter einem Winkel von $\alpha = 30°$ gegenüber der horizontalen und der Abwurfgeschwindigkeit $v_0 = 12,0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ weggeworfen.

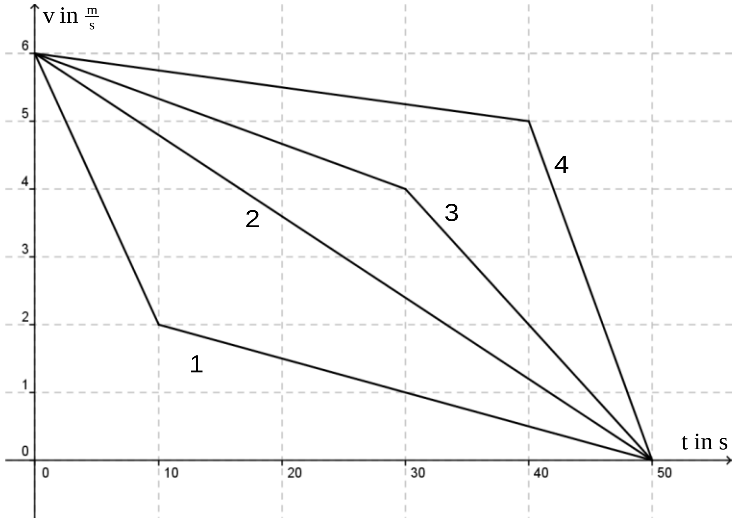
a) Berechnen Sie zunächst die Geschwindigkeitskomponenten v_{0_x} und v_{0_y} im Moment des Abwurfs.
b) Berechnen Sie die maximale Flughöhe der Kugel.
c) Berechnen Sie die Flugweite der Kugel
d) Berechnen Sie unter welchem Winkel die Kugel auf dem Boden auftrifft.
e) Berechnen Sie die Flugdauer der Kugel.

Aufgaben

29. Ein Weitspringer mit dem Körperschwerpunkt $h_0 = 1,0\,\text{m}$ (Abwurfhöhe) erreicht bei einem Absprungwinkel von $\alpha = 40°$ eine Sprungweite von $x_W = 7,00\,\text{m}$. Berechnen Sie seine Absprunggeschwindigkeit v_0. Ermitteln Sie, wie weit er bei einem Absprungwinkel von $\alpha = 45°$ gesprungen wäre.
30. Leiten Sie ausgehend von der „Flugbahngleichung beim schiefen Wurf“ einen Ausdruck zur Berechnung der Wurfweite her. Entscheiden Sie, für welchen Abwurfwinkel α die Wurfweite maximal werden würde.

Ergänzende Aufgaben:

31.0 Das folgende t-v-Diagramm zeigt die Bewegung von vier Autos.



31.1 Welche der folgenden Aussagen sind richtig. Begründen Sie kurz ihre Antwort.

- Jedes Fahrzeug hat die gleiche Anfangsgeschwindigkeit.
- Die Fahrzeiten der Fahrzeuge sind gleich.
- Die Geschwindigkeit nimmt in allen vier Fällen ab.
- Jede Bewegung ist eine gleichmäßige Verzögerung.

31.2 Begründen Sie zunächst ohne Rechnung, welches Fahrzeug den kürzesten Bremsweg hat. Berechnen Sie den Bremsweg der vier Fahrzeuge.

32.0 Ein Körper wird aus der Höhe h_0 fallen gelassen.

32.1 Zeigen Sie, dass dieser Körper die erste Hälfte der Strecke in einer Zeit von $t_1 = \sqrt{\frac{h_0}{g}}$ zurücklegt.

32.2 Ermitteln Sie, welchen prozentualen Anteil die Flugzeit der zweiten Hälfte der Strecke in Bezug auf die gesamte Fallzeit ausmacht.