§ 1 Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

<u>1.1 Bewegungsarten und Bahnkurven</u>

Ein Körper bewegt sich, wenn er in Bezug auf einen anderen Körper bzw. eines Bezugspunktes seine Lage verändert.

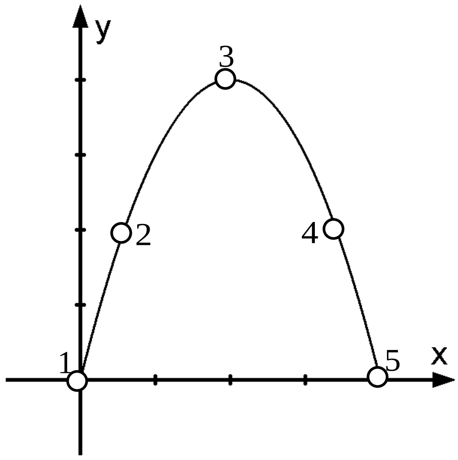
Bewegungsarten:

- Translation (geradlinige Bewegung im Raum)
  Bspe.: fahrendes Kfz auf einer ebenen Straße; vom Baum fallender Apfel; ..
- Rotation (komplizierte Drehbewegung)
  Bspe.: Reifenventil bei Fahrt; ...

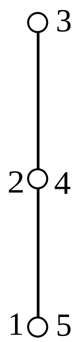
<u>Definition</u>: In der Physik werden räumlich ausgedehnte Körper als Massenpunkt idealisiert (die gesamte Masse ist im Schwerpunkt)
Eine Bewegung ist eine Ortsveränderung eines Massenpunktes gegenüber einem Bezugssystem. Sie wird durch eine Kurve beschrieben.
Idealerweise wird eine Bewegung mit Hilfe eines Ortsvektors und Koordinaten beschrieben.

Bsp.: Ein Fahrgast in einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Zuges wirft einen Ball senkrecht nach oben.

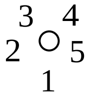
a) Bahnkurve aus Sicht eines außenstehenden Beobachters.



b) Bahnkurve aus Sicht eines mitfahrenden Beobachters.



c) Bahnkurve aus Sicht eines auf dem Ball sitzenden Beobachters



Ergebnis: Die Bahnkurve und damit die Beschreibung einer Bewegung hängt von der Wahl des Bezugssystems ab. (Der Bezugspunkt entspricht dabei dem Nullpunkt eines Koordinatensystems)

Die Aussage, dass ein Körper ruht oder sich bewegt hängt ebenfalls vom Bezugssystem ab. (Bewegung und Ruhe sind relativ!)

1.2 Gleichförmige Translationsbewegung eines Massenpunktes

Ein Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt legt in gleichen Zeitintervallen Δt die gleichen Wegstrecken Δx zurück. Daher gilt:

$$\boxed{v = \frac{\Delta x}{\Delta t}} \qquad [v] = \frac{m}{s}$$

Zur besseren Verdeutlichung betrachten wir eine lineare Bewegung in Richtung der positiven x-Achse, welche zur Zeit t_0 an der Ortskoordinate x_0 beginnt. Gibt nun $x(t)$ den Ort zur beliebigen Zeit t an, so folgt zunächst:

$$\Delta x = x(t) - x_0 \text{ und } \Delta t = t - t_0$$

Beachte: Bei der Berechnung der Differenz zweier Größen gilt:

$$\text{Delta} = \text{Endzus}\tan\text{d} - \text{Anfangszus}\tan\text{d}$$

Setzt man dies nun in obige Gleichung ein, so erhält man:

$$v = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0}$$
$$x(t) - x_0 = v \cdot (t - t_0) \quad \text{mit } t_0 = 0$$
$$x(t) = v \cdot t + x_0$$

die Zeit-Ortsfunktion einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

$$\boxed{x(t) = v \cdot t + x_0}$$

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Zeit, die das Licht von der Sonne zur Erde (rund 150 Mio. km) braucht, wenn die Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 3{,}0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ beträgt.

2. Bei der Echolotung der Meerestiefe wird ein kurzer Ultraschallimpuls vom Schiffsboden ausgesandt, der nach 2,6 s als Echo wieder zurückkommt. Berechnen Sie die Meerestiefe h, wenn die Schallgeschwindigkeit im Wasser $c = 1475 \frac{m}{s}$ beträgt.

3. Ein 300 m langer Güterzug fährt mit $60 \frac{km}{h}$ über eine 200 m lange Brücke. Berechnen Sie die Zeit, während der die Brücke durch Teile des Zuges belastet wird.

4.0 Ein LkW fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 65 \frac{km}{h}$.
4.1 Berechnen Sie, welchen Weg er dabei in einer Zeit von $t = 8{,}5\,\text{min}$ zurücklegt?

$$v = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad x = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad x = \left(65 : 3{,}6\right)\tfrac{m}{s} \cdot 510\,s = 9208\tfrac{1}{3}\,m \approx \underline{\underline{9{,}2\,km}}$$

4.2 In welcher Zeit legt er eine Strecke von $x = 110\,km$ zurück?

$$v = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{110\,km}{65\,\frac{km}{h}} = 1\tfrac{9}{13}\,h \approx \underline{\underline{1{,}7\,h}}$$

5.0 Eine Strecke von $s = 300\,km$ soll mit einem Wagen zurückgelegt werden. Vergleiche die dazu benötigte Zeit, wenn
5.1 die Geschwindigkeit immer $75 \frac{km}{h}$ beträgt.

$$v = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v} = \frac{300\,km}{75\,\frac{km}{h}} = \underline{\underline{4{,}0\,h}}$$

5.2 wenn eine Hälfte des Weges mit $50 \frac{km}{h}$, die andere mit $100 \frac{km}{h}$ zurückgelegt wird?

$$t = t_1 + t_2 = \frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_2} = \frac{150\,km}{50\,\frac{km}{h}} + \frac{150\,km}{100\,\frac{km}{h}} = \underline{\underline{4{,}5\,h}}$$

5.3 ein viertel der Fahrzeit mit $50 \frac{km}{h}$, die restliche Fahrzeit mit $100 \frac{km}{h}$ gefahren wird?

$$x_G = x_1 + x_2 = v_1 \cdot \tfrac{1}{4}t + v_2 \cdot \tfrac{3}{4}t = \tfrac{t}{4} \cdot \left(v_1 + 3v_2\right)$$
$$t = \frac{4x_G}{v_1 + 3v_2} = \frac{4 \cdot 300\,km}{50\,\frac{km}{h} + 3 \cdot 100\,\frac{km}{h}} = 3\tfrac{3}{7}\,h \approx \underline{\underline{3{,}4\,h}} \quad \left(3h\ 25\,min\ 43s\right)$$

6.0 Ein Mopedfahrer, welcher 2,0km von Freising entfernt ist, bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ geradlinig von Freising weg.

6.1 Berechnen Sie, welche Entfernung von Freising der Mopedfahrer nach einer Fahrzeit von 12min hat?

$$x(t) = x_0 + v \cdot t$$

$$x(\tfrac{1}{6}\,\text{h}) = 2{,}0\text{km} + 50\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \tfrac{1}{5}\,\text{h} = \underline{\underline{12\,\text{km}}}$$

6.2 Berechnen Sie, wie lange er fahren muss, bis er 27km von Freising entfernt ist?

$$x(t) = x_0 + v \cdot t \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{v} = \frac{27\,\text{km} - 2{,}0\,\text{km}}{50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \underline{\underline{0{,}50\text{h}}} \qquad (= 30\,\text{min})$$

6.3 Berechnen Sie, welche Entfernung von Freising der Mopedfahrer nach einer Fahrzeit von 12min hat, wenn er geradlinig Richtung Freising fahren würde?

Da der Motorradfahrer in die entgegengesetzte Fahrrichtung unterwegs ist, setzt man für die Geschwindigkeit $v = -50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$x(t) = x_0 + v \cdot t$$

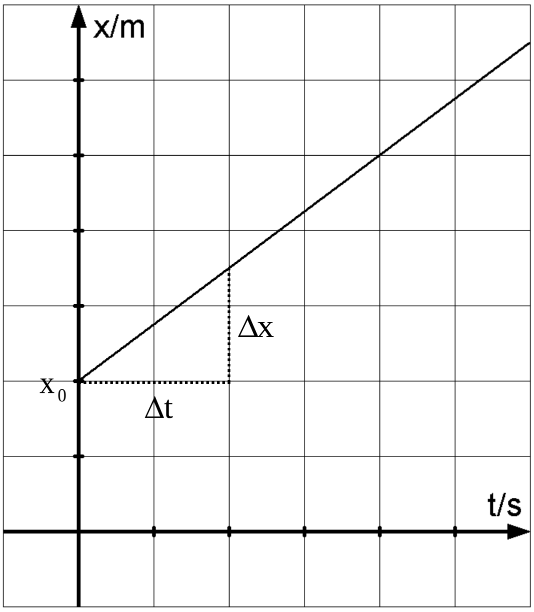
$$x\left(\tfrac{1}{5}\,\text{h}\right) = 2{,}0\text{km} - 50\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \tfrac{1}{5}\,\text{h} = \underline{\underline{-8{,}0\,\text{km}}}$$

Der Mopedfahrer fährt also durch Freising und befindet sich in einer Entfernung von 8,0km in entgegengesetzter Richtung.

1.3 Die Zeit-Ortsfunktion im t-x-Diagramm:

Die Zeit-Ortsfunktion $x(t) = v \cdot t + x_0$ ist ein linearer Funktionsterm. Ihr Graph ist ein(e) Gerade(nstück).

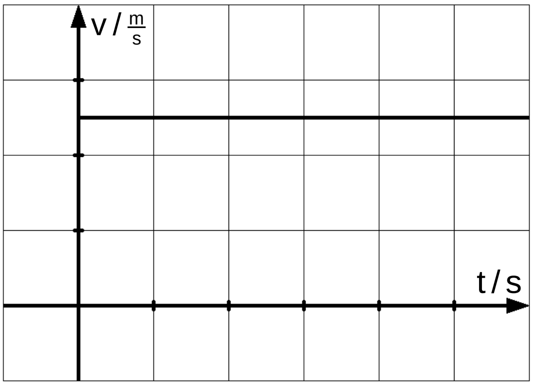
Dabei entspricht der Geschwindigkeit v die Steigung der Geraden und der y-Achsenabschnitt x_0 entspricht der Entfernung vom Bezugsnullpunkt zur Zeit $t = 0$



$$x(t) = v \cdot t + x_0$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathrel{\hat{=}} \text{Steigung der Geraden}$$

Zu jedem t-x-Diagramm lässt sich aber auch ein dazugehöriges t-v-Diagramm zeichnen. Das sieht dann so aus.



Bei einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit erhält man eine waagrechte Gerade.

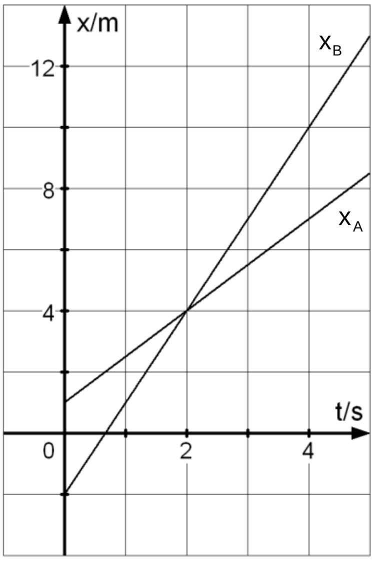
Aufgaben

7.0 Zwei Körper A und B bewegen sich auf der gleichen geradlinigen Bahn. Für ihre Zeit-Orts-Funktion gilt:

$$x_A(t) = 1{,}0\,\text{m} + 1{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t \qquad \text{für } 0 \le t \le 4{,}0\,\text{s}$$

$$x_B(t) = -2{,}0\,\text{m} + 3{,}0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t \qquad \text{für } 0 \le t \le 4{,}0\,\text{s}$$

7.1 Veranschauliche die beiden Bewegungsvorgänge in einem t-x-Diagramm und beschreibe die Bewegung der beiden Körper.



Die beiden Körper fahren an verschiedenen Orten weg. Körper B ist schneller als Körper A und überholt ihn daher nach einer gewissen Zeit.

7.2 Berechne zu welchem Zeitpunkt t_1 und an welchem Ort x_1 sich die beiden Körper treffen.

$$x_A(t_1) = x_B(t_1)$$

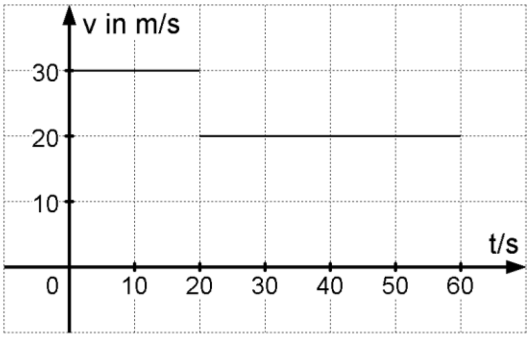
$$1{,}0\,\text{m} + 1{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_1 = -2{,}0\,\text{m} + 3{,}0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_1$$

$$3{,}0\,\text{m} = 1{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t_1$$

$$t_1 = \underline{\underline{2{,}0\,\text{s}}}$$

$$x_1 = x_A(2{,}0\,\text{s}) = 1{,}0\,\text{m} + 1{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2{,}0\,\text{s} = \underline{\underline{4{,}0\,\text{m}}}$$

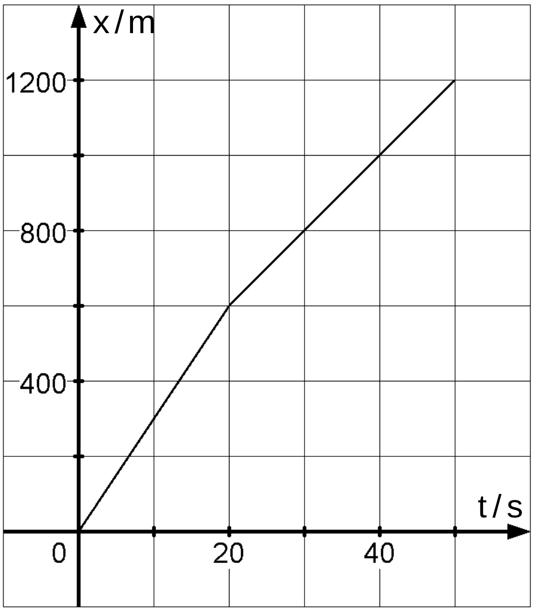
8.0 Das skizzierte t-v-Diagramm gibt den Bewegungsablauf eines Körpers wieder.



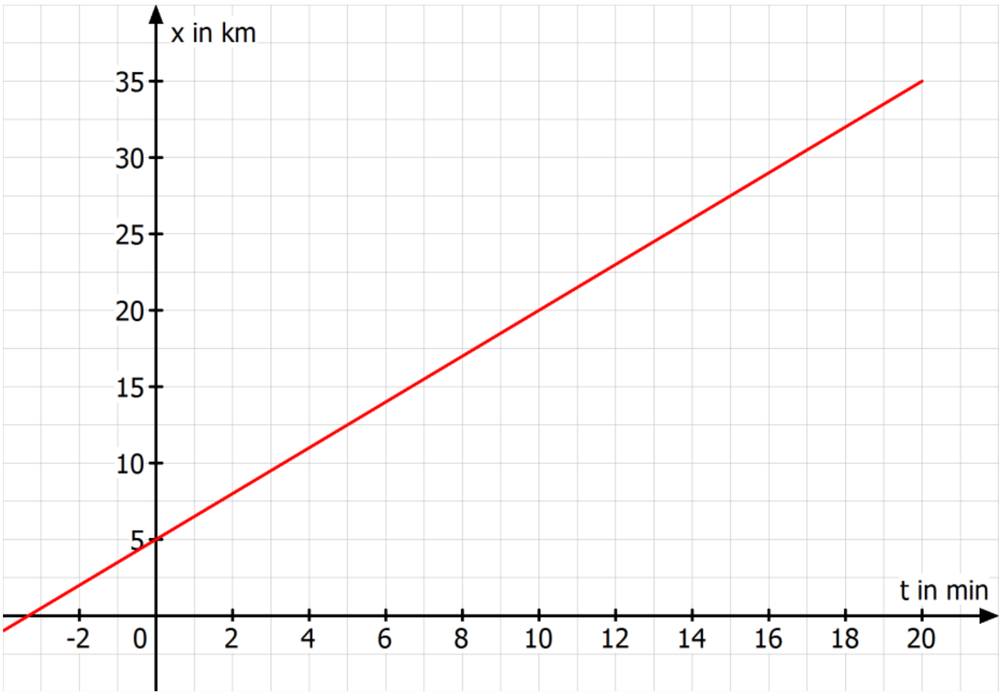
8.1 Berechnen Sie den Weg, der in 50s zurückgelegt wird!

Im 1. Abschnitt legt er den Weg:
$x_1 = 30\,\frac{m}{s} \cdot 20\,s = 600m$ zurück.
Im 2. Abschnitt legt er den Weg:
$x_2 = 20\,\frac{m}{s} \cdot 40\,s = 800m$ zurück.
Insgesamt wird ein Weg von $x_G = 600m + 800m = 1400m$ zurückgelegt.

8.2 Zeichnen Sie das zugehörige t-x-Diagramm.



9.0 Gegeben ist das t-x-Diagramm der Bewegung eines Fahrzeugs.



9.1 Ermitteln Sie die Geschwindigkeit in m/s des Fahrzeugs und errechnen Sie zu welchem Zeitpunkt es am Ort x = 25 km ist.

9.2 Berechnen Sie die Strecke die das Fahrzeug in 20 min fährt. Kontrollieren Sie ihr Ergebnis mit Hilfe des t-x-Diagramms.

9.3 Geben Sie die Bewegungsgleichung x(t) mit eingesetzten Zahlengrößen an.

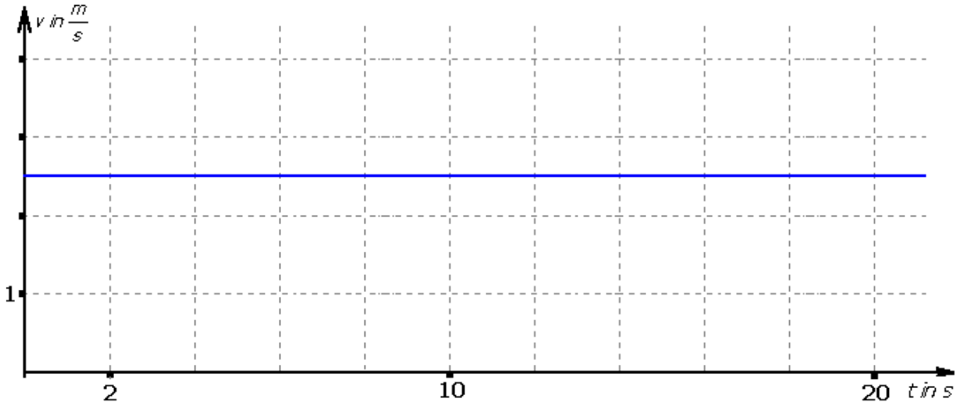
10. Ein Passagierflugzeug fliegt mit 850 km/h. Berechnen Sie die Strecke die es in 1,0 s fliegt.

11. Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit der Erde auf ihrer (nahezu) kreisförmigen Bahn um die Sonne, wenn der Abstand Erde-Sonne 149 Millionen km beträgt.

12. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit v_1 und v_2 sowie die mittlere Geschwindigkeit v_{ges} während der 10 min.

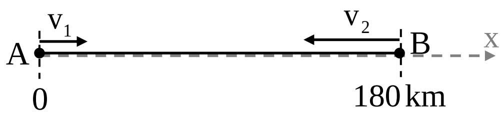
13. Auf einem der Mondflüge wurde ein Reflektor zurückgelassen. Bestrahlt man diesen mit einem Laserstrahl von der Erde aus, kann man aus der Laufzeit des Lichtes die Entfernung ermitteln. Die Laufzeit beträgt bei einer bestimmten Mondstellung 2,56 s. Berechnen Sie die Entfernung zum Mond.

14.0 Gegeben ist folgendes t-v-Diagramm:



14.1 Geben Sie die Geschwindigkeit in km/h an.
14.2 Berechnen Sie die Wegstrecke, die der Körper zwischen den Zeitpunkten 8,0s und 12,0 s zurückgelegt hat. Markieren Sie diese Strecke im Diagramm.
14.3 Zeichnen Sie das zugehörige t-s-Diagramm [Maßstab $1\text{s} \mathrel{\hat{=}} 5\text{mm}$; $5\text{m} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$]
14.4 Berechnen Sie den Aufenthaltsort zum Zeitpunkt 8,0s.

15. Um 13:42 Uhr fährt am Bahnhof A ein Güterzug mit der Geschwindigkeit $v_1 = 35\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in Richtung des Bahnhofs B. Zur gleichen Zeit fährt auf dem 180 km entfernten Bahnhof B auf dem Gegengleis ein Schnellzug mit der Geschwindigkeit $v_2 = 115\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in Richtung des Bahnhofs A ab. Zu welchem Zeitpunkt und in welcher Entfernung vom Bahnhof A begegnen sich die beiden Züge?



Die beiden Zeit-Ortsfunktionen lauten:

$$x_A(t) = 35\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$$

$$x_B(t) = -115\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t + 180\,\text{km}$$

Da sich B in entgegengesetzter Richtung von A bewegt ist hier die Geschwindigkeit negativ,.

Für den Treffpunkt gilt:

$$x_A(t) = x_B(t)$$

$$35\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t = -115\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t + 180\,\text{km}$$

$$150\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t = +180\,\text{km}$$

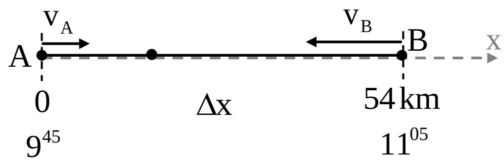
$$t = 1,2\,\text{h} = 72\,\text{min}$$

Treffpunkt ist somit um 14:54 Uhr

Berechnung der Entfernung: $x_A(1,2\,\text{h}) = 35\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,2\,\text{h} = \underline{\underline{42\,\text{km}}}$

16.0 Die Orte Altenfeld und Brunsbüttel sind 54km voneinander entfernt. Um 9.45Uhr startet Alto in Altenfeld und fährt mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit $v_A = 18\,\frac{km}{h}$ nach Brunsbüttel. Um 11.05Uhr startet Bruno in Brunsbüttel und fährt mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit $v_B = 27\,\frac{km}{h}$ Alto entgegen.

16.1 Geben Sie für beide Bewegungen die Zeit-Orts-Funktion mit eingesetzten Zahlenwerten an.



1. Möglichkeit: (Zeitrechnung beginnt um 9.45 Uhr)

$$x_A(t) = v_A \cdot t = 18\,\tfrac{km}{h} \cdot t$$

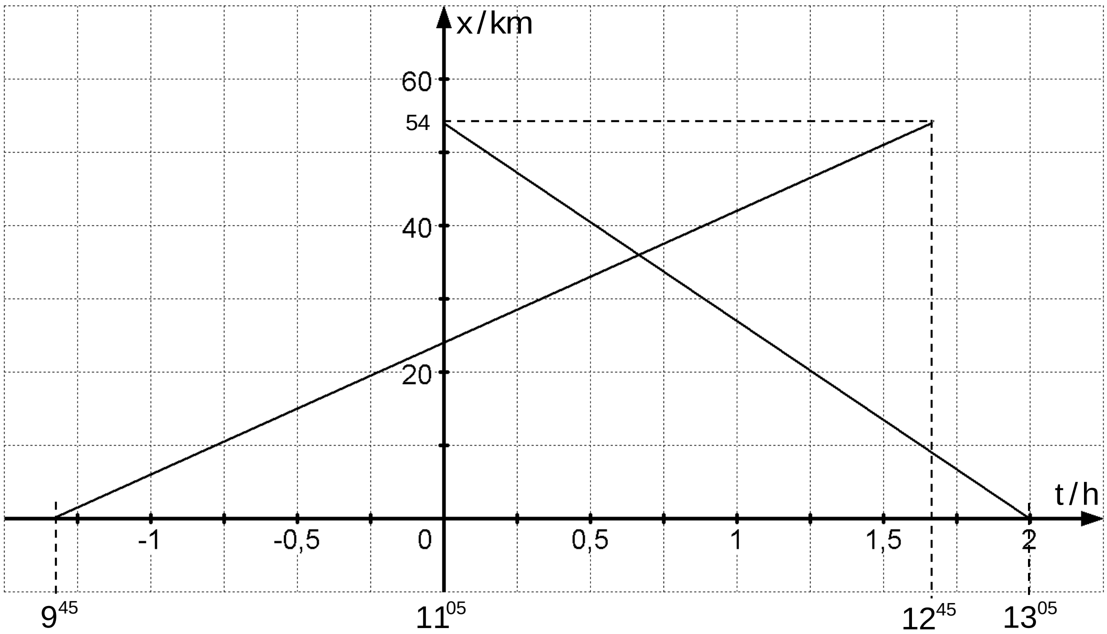
$$x_B(t) = x_{AB} + v_B \cdot (t - \Delta t) = 54\,km - 27\,\tfrac{km}{h}\left(t - \tfrac{4}{3}h\right) \quad \text{mit } t > \tfrac{4}{3}h$$

2. Möglichkeit: (Zeitrechnung beginnt um 11.05 Uhr)

$$x_A(t) = \Delta x + v_A \cdot t = 24\,km + 18\,\tfrac{km}{h} \cdot t$$

$$x_B(t) = x_{AB} - v_B \cdot t = 54\,km - 27\,\tfrac{km}{h}\,t$$

16.2 Stelle die beiden Bewegungsvorgänge in einem t-x-Diagramm dar.



16.3 Ermittle rechnerisch die Uhrzeit sowie den von Alto bis zum Treffpunkt mit Bruno zurückgelegten Weg.

$$x_A(t) = x_B(t)$$

$$24\,km + 18\,\tfrac{km}{h} \cdot t = 54\,km - 27\,\tfrac{km}{h}\,t$$

$$45\,\tfrac{km}{h} \cdot t = 30\,km$$

$$t = \tfrac{2}{3}h = 40\,min$$

Treffpunkt ist somit um 11.45 Uhr

$$x_A(\tfrac{2}{3}h) = 24\,km + 18\,\tfrac{km}{h} \cdot \tfrac{2}{3}h = 36\,km$$

1.4 Aufgaben bei welchen der Bezugspunkt auf einem bewegten Körper gewählt wird

Bei obigen Aufgaben wurde der Bezugspunkt so gewählt, dass der Beobachter selbst ruht und als Außenstehender die Bewegungsvorgänge betrachtet.
Bei folgenden Aufgaben aber ist es nun ratsam den Bezugspunkt in einem der bewegten Körper zu wählen. Relativ zum Beobachter bewegt sich dann lediglich nur der andere Körper. Dessen Effektivgeschwindigkeit erhält man durch Addition (wenn sich die Körper entgegengesetzt bewegen) bzw. durch Subtraktion (wenn sich die Körper in gleicher Richtung bewegen) ihrer Geschwindigkeiten. Durch diese Wahl des Bezugspunktes erleichtert sich die Berechnung wesentlich.

Aufgaben

17.0 Zwei Straßenbahnen fahren mit $v_1 = 18\,\frac{km}{h}$ und $v_2 = 36\,\frac{km}{h}$ aneinander vorbei. Die Länge der einen Bahn beträgt $l_1 = 26m$, die der anderen $l_2 = 39m$.

17.1 Die beiden Bahnen fahren in entgegengesetzte Richtung. Wie lange dauert es, bis sie vollständig aneinander vorbeigefahren sind?

$$v = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v} = \frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} = \frac{26\,m + 39\,m}{18\,\frac{km}{h} + 36\,\frac{km}{h}} = \frac{65\,m}{15\,\frac{m}{s}} = 4\tfrac{1}{3}\,s = \underline{\underline{4{,}3s}}$$

17.2 Wie lange wird einem Fahrgast in Bahn 1 bzw. in Bahn 2 durch die jeweils andere Bahn die Sicht versperrt?

$$t_1 = \frac{x}{v} = \frac{l_2}{v_1 + v_2} = \frac{39\,m}{18\,\frac{km}{h} + 36\,\frac{km}{h}} = \frac{39\,m}{15\,\frac{m}{s}} = \underline{\underline{2{,}6\,s}}$$

$$t_2 = \frac{x}{v} = \frac{l_1}{v_1 + v_2} = \frac{26\,m}{18\,\frac{km}{h} + 36\,\frac{km}{h}} = \frac{26\,m}{15\,\frac{m}{s}} = \underline{\underline{1{,}7\,s}}$$

17.3 Beide Straßenbahnen fahren nun mit $v_1 = 18\,\frac{km}{h}$ und $v_2 = 36\,\frac{km}{h}$ auf parallelen Gleisen in gleicher Richtung. Zum Zeitpunkt $t = 0\,s$ hat die schnellere Bahn 2 das Ende der langsameren Bahn 1 erreicht. Nach welcher Zeit und nach welcher Fahrstrecke x_1 bzw. x_2 befinden sich die Spitzen der beiden Bahnen auf gleicher Höhe?

$$t_1 = \frac{x}{v} = \frac{l_1}{v_2 - v_1} = \frac{26\,m}{36\,\frac{km}{h} - 18\,\frac{km}{h}} = \frac{26\,m}{5\,\frac{m}{s}} = \underline{\underline{5{,}2\,s}}$$

Die Differenz $v_2 - v_1$ nennt man die Relativgeschwindigkeit v_r

$$v_r = v_2 - v_1$$

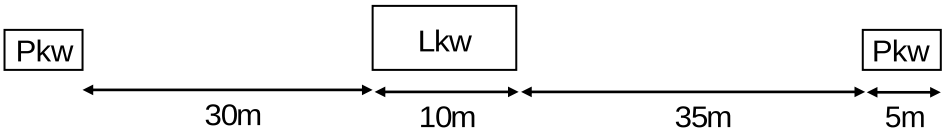
$$x_1 = t_1 \cdot v_1 = 5{,}2\,s \cdot 5\,\frac{m}{s} = 26\,m$$

$$x_2 = t_1 \cdot v_2 = 5{,}2\,s \cdot 10\,\frac{m}{s} = 52\,m$$

Überholvorgänge, Verhalten im Straßenverkehr

18. Ein Lkw (Länge $l_L = 10\text{m}$; $v_L = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$) soll von einem Pkw (Länge $l_P = 5\text{m}$; $v_P = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$) überholt werden. Vor dem Überholvorgang beträgt der Sicherheitsabstand $s_{PL} = 30\text{m}$, nach dem Einscheren $s_{LP} = 35\text{m}$.
Wie lange dauert der Überholvorgang und welche Strecke legt der Pkw dabei zurück? (Die Zeit und der zusätzliche Weg für den zweimaligen Fahrbahnwechsel soll unberücksichtigt bleiben!)

1. Möglichkeit: Betrachtung des Überholvorgangs von der Straße aus.
2 Fahrzeuge bewegen sich $\Rightarrow$ *wird schwierig (so nicht)*
2. Möglichkeit: Betrachtung des Überholvorgangs vom Lkw aus. *(Der Lkw scheint hier still zu stehen)*



Um den Lkw zu überholen muss der Pkw eine Strecke von $x = 30\text{m} + 10\text{m} + 35\text{m} + 5\text{m} = 80\text{m}$ zurücklegen (gemessen von der Vorderseite des Pkw). Seine relative Geschwindigkeit, die er effektiv schneller als der Lkw ist beträgt dabei $v_{rel} = v_P - v_L = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Somit folgt für die Überholzeit $t_Ü$:

$$t_Ü = \frac{x}{v_{rel}} = \frac{\text{Summe der Autolängen und Sicherheitsabstände}}{\text{Differenz der Fahrgeschwindigkeiten}}$$

$$t_Ü = \frac{80\text{m}}{5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 16\text{s}$$

Für die Strecke, die der Pkw dabei zurücklegt gilt *(Die Bewegung wird jetzt wieder von der Straße aus betrachtet)*:

$$x_Ü = v_P \cdot t_Ü = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 16\text{s} = 400\text{m}$$

Unter Berücksichtigung des möglichen Gegenverkehrs ist folgende Faustregel zu beachten.

Die Fahrbahn muss mindestens auf doppelter Überholstrecke einsehbar und frei von Gegenverkehr sein.

Je kürzer die Überholzeit, desto kürzer die Überholstrecke.
Je größer der Geschwindigkeitsunterschied, desto kürzer die Überholstrecke bzw. je kleiner die Relativgeschwindigkeit, desto länger die Überholstrecke.

Also hier: Es müssen mindestens die nächsten 16 Straßenpfosten sehbar und die Strecke frei von Gegenverkehr sein.
Dabei geht man aber davon aus, das der mögliche Gegenverkehr genauso schnell fährt wie man selbst. Doch oft ist der Gegenverkehr schneller unterwegs. Daher sollte eine noch größere Strecke frei einsehbar sein.

19. Ein Lkw mit Anhänger (Gesamtlänge 18m), der auf der Autobahn mit der Geschwindigkeit von $80\,\frac{km}{h}$ fährt wird von einem Lastzug der Länge 14m mit der Geschwindigkeit $85\,\frac{km}{h}$ überholt. Berechne die Dauer des Überholvorgangs und die Strecke, die dabei der Lastzug zurücklegt, wenn die Sicherheitsabstände vor und nach dem Überholen je 20m betragen.

$$t_{Ü} = \frac{x}{v_{rel}} = \frac{18\,m + 14\,m + 20\,m + 20\,m}{85\,\frac{km}{h} - 80\,\frac{km}{h}} = \frac{72\,m}{(5:3,6)\,\frac{m}{s}} = \underline{\underline{52\,s}}$$

$$x_L = t_{Ü} \cdot v_L = 52\,s \cdot (85:3,6)\,\frac{m}{s} = \underline{\underline{1,2\,km}}$$

20. Ein Pkw (Länge 4,5m) mit Anhänger (Länge 3,7m) fährt auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von $86\,\frac{km}{h}$ und wird von einem Motorrad (Länge 1,8m) mit einer Geschwindigkeit von $104\,\frac{km}{h}$ überholt. Berechne die Überholstrecke des Motorrads, wenn der Sicherheitsabstand vor dem Überholen 25m und nach dem Überholen 35m beträgt.

$$t_{Ü} = \frac{x}{v_{rel}} = \frac{4,5\,m + 3,7\,m + 1,8\,m + 25\,m + 35\,m}{104\,\frac{km}{h} - 86\,\frac{km}{h}} = \frac{70\,m}{(18:3,6)\,\frac{m}{s}} = \underline{\underline{14\,s}}$$

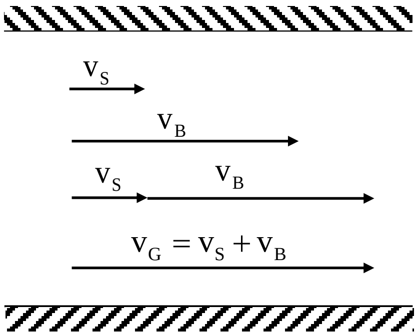
$$x_M = t_{Ü} \cdot v_M = 14\,s \cdot (104:3,6)\,\frac{m}{s} = \underline{\underline{0,40\,km}}$$

1.5 Überlagerung von gleichförmigen Bewegungen

Im Alltag kommt es oft vor, dass ein Körper gleichzeitig an mehreren Bewegungen teilnimmt.
Bspe.:

- Gehen auf einer Rolltreppe
- Flugzeug mit Rücken-, Gegen- oder Seitenwind
- Schwimmen in einem fließenden Gewässer

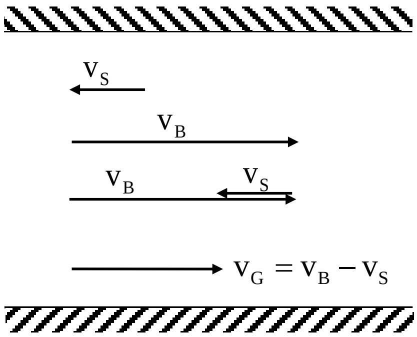
1.) Zwei Geschwindigkeiten sind parallel und zeigen in die gleiche Richtung



Für die Gesamtgeschwindigkeit gilt:

$$\boxed{v_G = v_S + v_B}$$

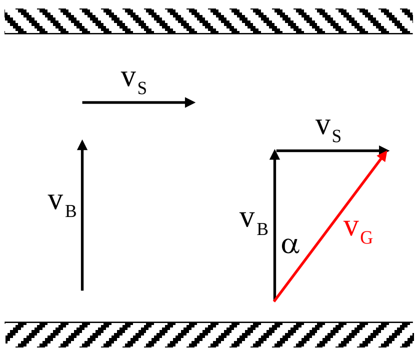
2.) Zwei Geschwindigkeiten sind parallel und zeigen in entgegengesetzter Richtung



Für die Gesamtgeschwindigkeit gilt:

$$\boxed{v_G = v_B - v_S}$$

3.) Zwei Geschwindigkeiten stehen aufeinander senkrecht



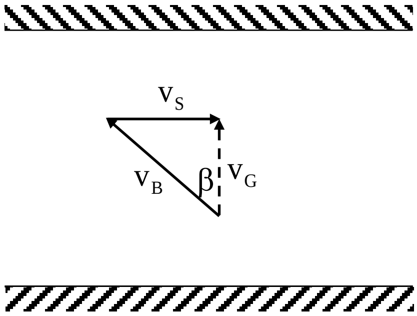
Für die Gesamtgeschwindigkeit gilt:

$$\boxed{v_G = \sqrt{v_S^2 + v_B^2}}$$

Für den Ablenkwinkel (Abdriftwinkel) α gilt:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{v_S}{v_B}}$$

Um zu verhindern, dass man in solch einem Fall abgetrieben wird benötigt man einen Vorhaltewinkel β



Für die Gesamtgeschwindigkeit gilt dann:

$$\boxed{v_G = \sqrt{v_B^2 - v_S^2}}$$

Für den Vorhaltewinkel β gilt:

$$\boxed{\sin\beta = \frac{v_S}{v_B}}$$

Zeigen Sie, dass der Abdriftwinkel α stets kleiner als der Vorhaltewinkel β ist!

Es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{v_S}{v_B} = \sin\beta$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \sin\beta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sin\beta$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \underbrace{\cos\alpha}_{<1} \cdot \sin\beta$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha < \sin\beta$$

$$\Rightarrow \quad \alpha < \beta$$

Aufgaben

21.0 Die Eigengeschwindigkeit eines Bootes sei $v_B = 18{,}0\,\frac{km}{h}$. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses beträgt $v_S = 6{,}0\,\frac{km}{h}$ und die Breite b des Flusses 90m. Das Boot fährt senkrecht zum Ufer über den Fluss.

21.1 Berechnen Sie die Fahrzeit, die Abdrift und die resultierende Geschwindigkeit des Bootes.

Fahrzeit: $t = \dfrac{b}{v_B} = \dfrac{90\,m}{(18:3{,}6)\,\frac{m}{s}} = 18\,s$

Abdrift: $\tan\alpha = \dfrac{v_S}{v_B} = \dfrac{6{,}0\,\frac{km}{h}}{18\,\frac{km}{h}} = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18°$

$\tan\alpha = \dfrac{s}{b} \quad \Rightarrow \quad s = b\cdot\tan\alpha = 90\,m \cdot \dfrac{1}{3} = 30\,m$

Gesamtgeschwindigkeit: $v_G = \sqrt{v_S^2 + v_B^2} = \sqrt{\left(6{,}0\,\frac{km}{h}\right)^2 + \left(18{,}0\,\frac{km}{h}\right)^2} \approx 19\,\frac{km}{h}$

21.2 In welche Richtung muss die Bootsachse zeigen, damit das Boot nicht abgetrieben wird? Wie groß ist nun die Fahrzeit?

Für den Vorhaltewinkel β gilt: $\sin\beta = \dfrac{v_S}{v_B} = \dfrac{6{,}0\,\frac{km}{h}}{18\,\frac{km}{h}} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 19°$

Die Fahrzeit t folgt folgendermaßen:

$$v_B^2 = v_S^2 + v_G^2 \quad \Rightarrow \quad v_G = \sqrt{v_B^2 - v_S^2}$$

$$t = \frac{b}{v_G} = \frac{b}{\sqrt{v_B^2 - v_S^2}} = \frac{90\,m}{\sqrt{\left(18\,\frac{km}{h}\right)^2 - \left(6{,}0\,\frac{km}{h}\right)^2}} = 19\,s$$

22.0 Ein Hubschrauber fliegt 100km von West nach Ost. Die Eigengeschwindigkeit beträgt $216\,\frac{km}{h}$ und es herrscht ein Ostwind der Geschwindigkeit $10\,\frac{m}{s}$.

22.1 Wie lange braucht der Hubschrauber für Hin- und Rückflug?

$$t_{Ges} = t_{Hin} + t_{Rück} = \frac{x}{v_{Hin}} + \frac{x}{v_{Rück}} = \frac{x}{v_H - v_W} + \frac{x}{v_H + v_W}$$

$$t_{Ges} = \frac{100\,km}{216\,\frac{km}{h} - 36\,\frac{km}{h}} + \frac{100\,km}{216\,\frac{km}{h} + 36\,\frac{km}{h}} = 0{,}95\,h$$

22.2 Kann der Zeitverlust beim Hinflug (Gegenwind) durch den gleichstarken Rückenwind beim Rückflug wieder aufgeholt werden? Begründe Deine Antwort. (Hinweis: Berechne die Rückflugzeit!)

Zeitverlust beim Hinflug:

$$\Delta t_{Hin} = t_{m.W} - t_{o.W} = \frac{x}{v_H - v_W} - \frac{x}{v_H} = \frac{100\,km}{216\,\frac{km}{h} - 36\,\frac{km}{h}} - \frac{100\,km}{216\,\frac{km}{h}} = 0{,}093\,h$$

Zeitgewinn beim Rückflug:

$$\Delta t_{Rück} = t_{o.W} - t_{m.W} = \frac{x}{v_H} - \frac{x}{v_H + v_W} = \frac{100\,km}{216\,\frac{km}{h}} - \frac{100\,km}{216\,\frac{km}{h} + 36\,\frac{km}{h}} = 0{,}066\,h$$

Somit ist der Zeitverlust beim Hinflug größer als der Zeitgewinn beim Rückflug; der Zeitverlust kann somit nicht aufgeholt werden.

22.3 Wie stark müsste auf dem Rückflug der Wind sein, damit der Zeitverlust nun ausgeglichen werden kann?

$$\Delta t = \frac{x}{v_H} - \frac{x}{v_H + v_W} \quad \Rightarrow \quad v_W = \frac{x}{\frac{x}{v_H} - \Delta t} - v_H = \ldots \approx 54\,\frac{km}{h} \quad \left(\hat{=}\,15\,\frac{m}{s}\right) \text{ mit } \Delta t = 0{,}093\,h$$

23.0 Ein Dampfer hat stromabwärts die Geschwindigkeit vom Betrag $26{,}64\,\frac{km}{h}$, stromaufwärts bei gleicher Leistungsabgabe der Motoren die Geschwindigkeit vom Betrag $16{,}56\,\frac{km}{h}$.

23.1 Wie groß ist die Geschwindigkeit des Dampfers im stehenden Gewässer?

Es gilt:

$$\begin{array}{lcl} v_{ab} = v_B + v_F & \Rightarrow & 26{,}64\,\frac{km}{h} = v_B + v_F \\ v_{auf} = v_B - v_F & & 16{,}56\,\frac{km}{h} = v_B - v_F \end{array}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man:

$$43{,}2\,\frac{km}{h} = 2 \cdot v_B \quad \Rightarrow \quad v_B = 21{,}6\,\frac{km}{h}$$

23.2 Wie groß ist der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit des Flusses in $\frac{m}{s}$?

Eingesetzt in eine der beiden obigen Gleichungen folgt:

$$26{,}64\,\tfrac{km}{h} = 21{,}6\,\tfrac{km}{h} + v_F \quad\Rightarrow\quad v_F = 5{,}04\,\tfrac{km}{h} = 1{,}4\,\tfrac{m}{s}$$

24. Die Strömungsgeschwindigkeit eines Flusses beträgt $5{,}0\,\frac{km}{h}$. Ein Motorboot soll diesen Fluss mit der resultierenden Geschwindigkeit $7{,}0\,\frac{km}{h}$ queren. Welche Eigengeschwindigkeit (Betrag und Richtung) besitzt das Motorboot, wenn es den Fluss auf dem kürzesten Weg überquert?

$$v_B^2 = v_S^2 + v_G^2 \quad\Rightarrow\quad v_B = \sqrt{v_G^2 + v_S^2} = \sqrt{\left(7{,}0\,\tfrac{km}{h}\right)^2 + \left(5{,}0\,\tfrac{km}{h}\right)^2} \approx 8{,}6\,\tfrac{km}{h}$$

Für den Vorhaltewinkel β gilt: $\tan\beta = \dfrac{v_S}{v_G} = \dfrac{5{,}0\,\frac{km}{h}}{7{,}0\,\frac{km}{h}} = \frac{5}{7} \quad\Rightarrow\quad \beta \approx 36°$

25.0 Ein Flugzeug legt eine Strecke von 500km zwischen zwei Orten A und B zurück. Die Motorleistung gestattet eine maximale Eigengeschwindigkeit von $360\,\frac{km}{h}$

25.1 Welche Zeit benötigt das Flugzeug mindestens, um diese Strecke bei Windstille zurückzulegen?

$$v_F = \frac{x}{t} \quad\Rightarrow\quad t = \frac{x}{v_F} = \frac{500\,km}{360\,\frac{km}{h}} = 1{,}39\,h \quad (1h\ 23\,min)$$

25.2 Welche Zeit benötigt das Flugzeug, um diese Strecke zurückzulegen, wenn ein Wind mit der Geschwindigkeit $18{,}0\,\frac{m}{s}$ weht

i) als Gegenwind?

$$t = \frac{x}{v_F - v_W} = \frac{500\,km}{360\,\frac{km}{h} - 18{,}0\cdot 3{,}6\,\frac{km}{h}} = 1{,}69\,h \quad (1h\ 42\,min)$$

ii) als Rückenwind?

$$t = \frac{x}{v_F - v_W} = \frac{500\,km}{360\,\frac{km}{h} - 18{,}0\cdot 3{,}6\,\frac{km}{h}} = 1{,}18\,h \quad (1h\ 11\,min)$$

iii) als Seitenwind?

Bei Seitenwind muss vorgehalten werden, somit folgt für die Geschwindigkeit v_G von A nach B:

$$v_G = \sqrt{v_F^2 - v_W^2} = \sqrt{\left(360\,\tfrac{km}{h}\right)^2 - \left(18{,}0\cdot 3{,}6\,\tfrac{km}{h}\right)^2} = 354\,\tfrac{km}{h}$$

$$t = \frac{x}{v_G} = \frac{500\,km}{354\,\frac{km}{h}} = 1{,}41\,h \quad (1h\ 25\,min)$$

26.0 Ein Flugzeug soll mit einer Geschwindigkeit von $324\,\frac{km}{h}$ genau von Süden nach Norden eine Strecke von 800km zurücklegen. Es gerät dabei in einen Ost-Sturm, der mit einer Geschwindigkeit von $28{,}3\,\frac{m}{s}$ bläst.

26.1 Wie groß wäre die Abweichung von der Nord-Süd-Richtung, wenn der Pilot den Seitenwind nicht wahrnimmt?

Für den Abdriftwinkel α gilt:

$$\tan(\alpha)=\frac{v_W}{v_F} \quad\Rightarrow\quad \tan(\alpha)=\frac{28{,}3\,\frac{m}{s}}{(324:3{,}6)\,\frac{m}{s}} \quad\Rightarrow\quad \alpha\approx 17{,}46°$$

Dann folgt für die Abdrift a:

$$\tan(\alpha)=\frac{a}{s} \quad\Rightarrow\quad a=s\cdot\tan(\alpha)=800\,km\cdot\tan(17{,}46°)\approx 252\,km$$

26.2 Welchen Kurs muss der Pilot steuern um den Flughafen im Norden zu erreichen?

Für den Vorhaltewinkel β gilt:

$$\sin(\beta)=\frac{v_W}{v_F} \quad\Rightarrow\quad \sin(\beta)=\frac{28{,}3\,\frac{m}{s}}{(324:3{,}6)\,\frac{m}{s}} \quad\Rightarrow\quad \beta\approx 18{,}33°$$

26.3 Welche Geschwindigkeit besitzt das Flugzeug in Süd-Nord-Richtung?
Für die Gesamtgeschwindigkeit v_G in N-S-Richtung gilt:

$$v_W^2+v_G^2=v_F^2 \quad\Rightarrow\quad v_G^2=v_F^2-v_W^2 \quad\Rightarrow\quad v_G=\sqrt{v_F^2-v_W^2}$$

$$v_G=\sqrt{\left(324:3{,}6\,\frac{m}{s}\right)^2-\left(28{,}3\,\frac{m}{s}\right)^2}\approx 85{,}43\,\frac{m}{s}$$

27. Für die 12.000km lange Strecke von Frankfurt nach Thailand benötigt ein Flugzeug bedingt durch den Gegenwind 16 Stunden. Für den Rückflug benötigt die Maschine bedingt durch den Rückenwind nur 14,5 Stunden.
Berechnen Sie die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges sowie die Windgeschwindigkeit.

Für die Geschwindigkeit v_{Hin} des Hinflugs gilt: $v_{Hin}=\frac{x}{t_{Hin}}=\frac{12.000\,km}{16\,h}=750\,\frac{km}{h}$

Für die Geschwindigkeit $v_{Rück}$ des Rückflugs gilt: $v_{Rück}=\frac{x}{t_{Rück}}=\frac{12.000\,km}{14{,}5\,h}\approx 828\,\frac{km}{h}$

Es gilt:

$$\begin{aligned} v_{Rück}&=v_F+v_W \\ v_{Hin}&=v_F-v_W \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 828\,\tfrac{km}{h}&=v_F+v_W \\ 750\,\tfrac{km}{h}&=v_F-v_W \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man die Geschwindigkeit des Flugzeugs:
$1578\,\frac{km}{h}=2\cdot v_F \quad\Rightarrow\quad v_F=789\,\frac{km}{h}$

Und für die Windgeschwindigkeit v_W gilt dann: $828\,\frac{km}{h}=789+v_W \quad\Rightarrow\quad v_W=39\,\frac{km}{h}$

28. Ein Radfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v_1 = 10\,\frac{km}{h}$ einen Berg hinauf und mit konstanter Geschwindigkeit $v_2 = 30\,\frac{km}{h}$ die gleiche Strecke hinab.
Berechnen Sie, wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit für die Gesamtstrecke ist?

Für die Hinauffahrt gilt: $v_1 = \frac{x}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{x}{v_1}$

Für die Hinabfahrt gilt: $v_2 = \frac{x}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{x}{v_2}$

Für die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ gilt:

$$\bar{v} = \frac{x_G}{t_G} = \frac{2 \cdot x}{t_1 + t_2} = \frac{2 \cdot x}{\frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2}} = \frac{2 \cdot x}{x \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{10\,\frac{km}{h}} + \frac{1}{30\,\frac{km}{h}}} = 15\,\frac{km}{h}$$

29. Zwei Schüler laufen unter einem rechten Winkel in gerader Richtung mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 6{,}0\,\frac{m}{s}$ und $v_2 = 8{,}0\,\frac{m}{s}$ auseinander. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sie sich voneinander entfernen. Nach welcher Zeit sind sie genau $s = 1{,}0\,km$ voneinander entfernt?

Der erste Schüler läuft in x-Richtung. Für seine Entfernung zum Startpunkt gilt:
$x = v_1 \cdot t$

Der zweite Schüler läuft in y-Richtung. Für seine Entfernung zum Startpunkt gilt:
$y = v_2 \cdot t$

Für die Entfernung der beiden Schüler gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_1 \cdot t)^2 + (v_2 \cdot t)^2} = \sqrt{v_1^2 \cdot t^2 + v_2^2 \cdot t^2} = \sqrt{t^2 \cdot \left(v_1^2 + v_2^2\right)} = t \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Dann folgt für die Geschwindigkeit v, mit der sie sich auseinander bewegen:

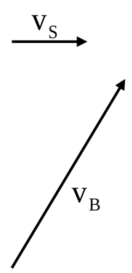
$$v = \frac{z}{t} = \frac{t \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{t} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\left(6{,}0\,\frac{m}{s}\right)^2 + \left(8{,}0\,\frac{m}{s}\right)^2} = 10\,\frac{m}{s}$$

Für die Zeit, nach welcher sie genau $s = 1{,}0\,km$ voneinander entfernt sind, gilt noch obige Formel:

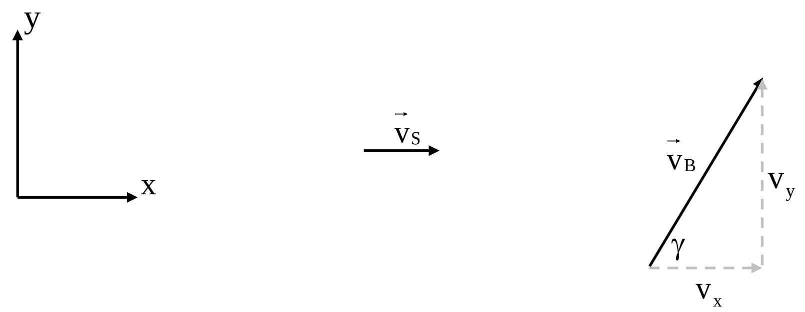
$$z = t \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \Rightarrow t = \frac{z}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{1000\,m}{\sqrt{\left(6{,}0\,\frac{m}{s}\right)^2 + \left(8{,}0\,\frac{m}{s}\right)^2}} = 100\,s$$

30. Zwei Personen laufen unter einem rechten Winkel in gerader Richtung mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 6{,}0\,\frac{m}{s}$ und $v_2 = 8{,}0\,\frac{m}{s}$ auseinander. Die zweite Person startet dabei $\Delta t = 5{,}0\,min$ nach der ersten Person. Berechnen Sie zunächst, wie weit die beiden nach einer Zeit von $t_1 = 10\,min$ voneinander entfernt sind.
Nach welcher Zeit sind die beiden genau $x = 1{,}0\,km$ voneinander entfernt?

Ergänzung: Zwei Geschwindigkeiten schließen einen beliebigen Winkel γ ein.



Hier ist es zunächst ratsam ein Koordinatensystem einzuführen und die Geschwindigkeitsvektoren bezüglich dieses Koordinatensystems zu betrachten.



Nun gilt für $\vec{v}_S = \begin{pmatrix} v_S \\ 0 \end{pmatrix}$ und für $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

Drückt man v_x und v_y mit Hilfe des Winkels γ und des Betrags v_B der Geschwindigkeit aus, so folgt:

$$\left.\begin{array}{lll} \cos\gamma = \dfrac{v_x}{v_B} & \Rightarrow & v_x = v_B \cdot \cos\gamma \\ \sin\gamma = \dfrac{v_y}{v_B} & \Rightarrow & v_y = v_B \cdot \sin\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_B \cdot \cos\gamma \\ v_B \cdot \sin\gamma \end{pmatrix}$$

Für den Vektor der Gesamtgeschwindigkeit gilt dann:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_S + \vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_B \cdot \cos\gamma \\ v_B \cdot \sin\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_S + v_B \cdot \cos\gamma \\ v_B \cdot \sin\gamma \end{pmatrix}$$

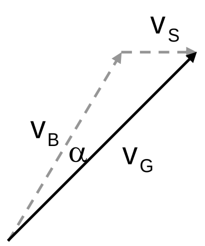
und für den Betrag der Gesamtgeschwindigkeit:

$$v_G = \sqrt{\left(v_S + v_B \cdot \cos\gamma\right)^2 + \left(v_B \cdot \sin\gamma\right)^2}$$

$$v_G = \sqrt{v_S^2 + 2v_S v_B \cdot \cos\gamma + v_B^2 \cdot \cos^2\gamma + v_B^2 \cdot \sin^2\gamma}$$

$$v_G = \sqrt{v_S^2 + 2v_S v_B \cdot \cos\gamma + v_B^2 \cdot \left(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\right)}$$

$$v_G = \sqrt{v_S^2 + v_B^2 + 2v_S v_B \cdot \cos\gamma}$$



Für den Abdriftwinkel α folgt mit dem Kosinussatz:

$$v_S^2 = v_B^2 + v_G^2 - 2v_S v_G \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{v_B^2 + v_G^2 - v_S^2}{2v_S v_G}$$

$$\cos\alpha = \frac{v_B^2 + v_S^2 + v_B^2 + 2v_S v_B \cdot \cos\gamma - v_S^2}{2v_S v_G}$$

$$\cos\alpha = \frac{2v_B^2 + 2v_S v_B \cdot \cos\gamma}{2v_S \cdot v_G}$$

$$\cos\alpha = \frac{v_B^2 + v_S v_B \cdot \cos\gamma}{v_S \cdot v_G}$$

$$\cos\alpha = \frac{v_B^2 + v_S v_B \cdot \cos\gamma}{v_S \cdot \sqrt{v_S^2 + v_B^2 + 2v_S v_B \cdot \cos\gamma}}$$