§ 13 Abstandsberechnungen - Lösungen

Aufgaben:

1. Welche Abstände haben die Punkte P und Q von der Ebene E?

   a) $P(1|0|0)$, $Q(1|1|1)$ und $E: \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$

   $d(P,E) = \frac{2}{3}$

   $d(Q,E) = \frac{1}{3}$

   b) $P(1|2|3)$, $Q(0|0|0)$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

   $d(P,E) = 2$

   $d(Q,E) = 5$

   c) $P(1|1|1)$, $Q(-1|0|-1)$ und $E: 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9 = 0$

   $d(P,E) = \frac{8}{9}$

   d) $P(7|-8|3)$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene E. Zeigen Sie, dass g und E parallel sind und berechnen Sie den Abstand der Geraden g von der Ebene E.

   a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $E: \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

   $d(g,E) = \frac{36}{\sqrt{41}}$

   b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $d(g,E) =$

3. Prüfen Sie, ob es Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Gerade g und die Ebene E parallel sind und den Abstand 1 besitzen.

   $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - 9 = 0$

4. Zeigen Sie, dass E_1 und E_2 parallel sind. Berechnen Sie den Abstand.

   a) $E_1: 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 16 = 0$ und $E_2: 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 24 = 0$

   $d(E_1, E_2) = \frac{8}{3}$

b) $E_1: 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 7 = 0$ und $E_2: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

$d(E_1, E_2) = \frac{7}{30}\sqrt{30}$

c) $E_1: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$ und $E_2: \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} + 22 = 0$

d) $E_1: 8x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 13 = 0$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

a) $P(5|5|5)$; $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d(P, g) = \frac{4}{3}\sqrt{2}$

b) $P(-4|-2|1)$; $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d(P, g) = 0$

c) $P(7|3|3)$; $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $P(1|1|0)$; $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

6. Welcher Punkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat von den beiden Punkten .. und

$B(1|0|1)$ denselben Abstand?

$P(-6|5|8)$

7. Berechnen Sie den Abstand der beiden zueinander parallelen Geraden g und h.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d(g,h) = 2\sqrt{6}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix}$

8. Gegeben sind die Punkte $A(2|1|2)$ und $B(-2|3|4)$ sowie die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Zeigen Sie, dass die Gerade g zur Geraden durch A und B parallel ist und bestimmen ihren Abstand.