§ 12 Schnittwinkel – Lösungen

1. Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der beiden Geraden

a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad S(1|1|1),\ \alpha=50{,}8°$

b) $g:\vec{x}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad S(0|0|0),\ \alpha=61{,}4°$

c) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad S(3|-1|0),\ \alpha=28{,}3°$

2. Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen

a) $E_1:\ -3x_1-2x_2+x_3-3=0$
$E_2:\ -3x_1-2x_2-x_3+1=0$ $\qquad \alpha=31{,}0°$

b) $E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\eta\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad \alpha=41{,}0°$

c) $E_1:\ 3x_1+5x_2=0$
$E_2:\ 2x_1-3x_2-3x_3-13=0$ $\qquad \alpha=70{,}8°$

3. Zeigen Sie, dass die Ebene $E: x_1+x_2+x_3-4=0$ alle Koordinatenebenen unter demselben Winkel schneidet. Wie groß ist dieser Winkel?

Es gilt: $\vec{n}_E=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Der Normalenvektor der x_1-x_2-Ebene ist $\vec{n}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Somit gilt für den Schnittwinkel dieser Ebene mit der Ebene E: $\alpha_3=54{,}7°$

Analog folgt: $\alpha_2=54{,}7°$ und $\alpha_1=54{,}7°$

4. Zeigen Sie, dass sich die Ebenen

$$E_1: 2x_2-x_3=0 \text{ und } E_2: 3x_1+x_2+2x_3-12=0$$

orthogonal schneiden.

$$\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \quad \Rightarrow \quad \text{Ebenen sind orthogonal}$$

5. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g und der Ebene E.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad E: x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3 = 0 \quad \alpha = 28{,}8°$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad E: x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = 0 \quad \alpha = 72{,}3°$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \alpha = 35{,}3°$

6. Prüfen Sie, ob sich die Gerade g und die Ebene E orthogonal schneiden.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad E: -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$

Nein, da $\vec{n}_E \neq k \cdot \vec{u}_g$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ja, da $\vec{n}_E = k \cdot \vec{u}_g$

Hinweis: Eine Gerade schneidet eine Ebene genau dann senkrecht, wenn der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene linear abhängig sind (also der eine ein Vielfaches des anderen ist!)