§ 10 Parametergleichung und Koordinatenform einer Ebene – Lösungen

1. Gib eine Gleichung der Ebene E an, die durch A in Richtung von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ verläuft.

a) $A(2|0|1)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) $A(0|0|0)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechne die Punkte P_i der Ebene, die zu den Parameterwerten λ_i und μ_i gehören.

$\lambda_1 = 1; \mu_1 = 2$

$\lambda_2 = 0; \mu_2 = -1$

$\lambda_3 = -1; \mu_3 = 4$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1(5|1|0)$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(-1|-1|-1)$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_3(9|5|-2)$$

3. Stelle die Gleichung der Ebene E auf, die durch $A(1|2|3)$ geht und parallel ist zur

a) $x_1 - x_2 -$Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $x_1 - x_3 -$Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d) Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ in der Ebene E liegt.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Beschreibe die besondere Lage der Ebene im Koordinatensystem

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Ebene E ist identisch zur $x_1 - x_2 -$Ebene

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Ebene E ist echt parallel zur $x_1 - x_3 -$Ebene

5.0 Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5.1 Bestimmen Sie vier Punkte, die auf der Ebene E liegen.

5.2 Geben Sie zwei Punkte an, die vom Aufpunktvektor den gleichen Abstand haben.

6. Überprüfen Sie, ob die Punkte $P(-1|6|0)$ und $Q(5|2|6)$ auf der Ebene

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegen.

$P \in E; Q \notin E$

7. Ermitteln Sie eine Parametergleichung für die Ebene durch die Punkte

a) $A(1|1|-2), B(3|-2|1), C(-1|1|-2)$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $A(0|-1|2), B(1|0|-3), C(2|-1|-2)$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $A(3|1|-2), B(-1|2|-3), C(0|-1|1)$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

8. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene durch folgende Punkte in der Parameter-, Normalen- und Koordinatenform.

a) $A(-1|3|1),\ B(3|-4|1),\ C(0|0|-1)$

$E: 14x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 5 = 0$

b) $A(6|-2|1),\ B(-1|0|2),\ C(0|0|1)$

$E: -2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 2 = 0$

9. Gegeben ist die Parametergleichung einer Ebene. Bestimmen Sie die dazugehörige Normalengleichung.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0$

d) $E: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E: \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$

10. Stellen Sie eine allgemeine Normalengleichung der Ebene E auf.

a) E hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und geht durch $A(1|-1|0)$

$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

b) E ist die $x_1 - x_2 -$Ebene.

$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$

c) E ist senkrecht zur $x_2 -$Achse und geht durch den Punkt $A(-4|1|3)$.

$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$

d) E geht durch $A(3|-2|5)$ und steht senkrecht zum Ortsvektor von A.

$E: \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0$

e) E ist die Symmetrieebene zu den Punkten $A(3|5|1)$ und $B(7|-1|3)$.

$\vec{m} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = ... = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = ... = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E: \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$

11. Gegeben sind der Punkt $A(3|2|1)$ und der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie die Normalengleichung und die Koordinatengleichung der Ebene E an, die den Punkt A enthält und $\vec{n}$ als Normalenvektor hat.

$E: \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

$E: -5x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2 = 0$

b) Welche der Punkte $P(1|1|0)$, $Q(2|3|-3)$ und $R(5|-1|11)$ liegen in dieser Ebene?

$P, Q \in E;\ R \notin E$

c) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $S_k(-5|1|k)$ in der Ebene E liegt.

$k = -10$

12. Stellen Sie eine allgemeine Normalengleichung für die Ebene E auf, die durch den Punkt $A(-4|1|3)$ geht und

a) parallel zur $x_1 - x_2 -$Ebene verläuft.

$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$

b) senkrecht zur $x_2 -$Achse verläuft.

$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$

c) senkrecht auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ steht.

$E: \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$

d) parallel zur der Ebene $F: 2x_1 - x_2 - x_3 - 8 = 0$ verläuft.

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

13. Wandeln Sie die Koordinatengleichung in eine allgemeine Normalengleichung um.

a) $E: 2x_1 - x_2 - 5 = 0$

b) $E: -2x_1 - x_3 + 8 = 0$

c) $E: 2x_1 - x_2 - x_3 - 8 = 0$

d) $F: x_2 - 4 = 0$

14. Ermitteln Sie ein Parametergleichung der Ebene E.

a) $E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $E: \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $E: 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5 = 0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) $E: 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6 = 0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e) $E: x_2 - 2x_3 = 0$

$$E: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

f) $E: x_1 - 9 = 0$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

15. Gegeben ist die Punktschar $A_t\left(4t\,|\,3+5t\,|\,-2t\right)$ mit $t\in\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass alle diese Punkte A_t auf einer Geraden g liegen. Bestimmen Sie eine Gleichung von g.

$$\begin{pmatrix}4t\\3+5t\\-2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4t\\5t\\-2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}\text{ ,mit } t\in\mathbb{R}$$

b) Für welches $t\in\mathbb{R}$ liegt der Punkt A_t in einer Ebene, die parallel zur x_2-x_3-Ebene ist und durch den Punkt $P(3|0|0)$ geht.

$E: x_1-3=0$

$t=\frac{3}{4}$

16. Gegeben ist die Ebenenschar $E_t:(t-1)x_1+t^2x_2-x_3-2=0$ mit $t\in\mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob es eine Ebene der Schar gibt, die senkrecht auf der x_3-Achse steht.

Es gibt kein $t\in\mathbb{R}$, so dass die Ebene senkrecht auf der x_3-Achse steht.

17. Gegeben ist die Geradenschar $h_t:\vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\8\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1+2t\\2-2t\\2+t\end{pmatrix}$ mit $t\in\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar in der Ebene E liegen, die durch die Punkte $A(0|0|9)$, $B(-4|-2|4)$ und $C(-5|2|5)$ bestimmt ist.

$E: 2x_1+x_2-2x_3+18=0$, dann h_t in E einsetzen!

b) Prüfen Sie, ob die Gerade durch die Punkte A und B zur Schar h_t gehört.

c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit zwei Geraden der Schar zueinander parallel sind?

18. Gegeben ist die Geradenschar $g_a:\vec{x}=\begin{pmatrix}-a\\2a\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ mit $a\in\mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass alle Schargeraden zueinander parallel sind.

b) Prüfen Sie, ob es eine Schargerade gibt, die durch den Ursprung geht.

c) Zeigen Sie, dass alle Schargeraden in einer Ebene E liegen. Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform an.

19. Gegeben sind die Geraden $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\10\\-2\end{pmatrix}$ und $g_t:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3t\\1\\2t\end{pmatrix}$ mit $t\in\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar g_t in einer Ebene liegen. Geben Sie eine Normalengleichung dieser Ebene E an.

b) Zeigen Sie, dass auch die Gerade h in der Ebene E liegt.

c) Prüfen Sie, ob es eine Gerade der Schar g_t gibt, die zu h parallel ist.

d) Prüfen Sie, ob die Gerade h zur Schar g_t gehört.

20. Gegeben ist die Ebenenschar $E_t: tx_1-tx_2+x_3-8=0$ mit $t\in\mathbb{R}$.

a) Prüfen Sie, ob die Punkte $P(1|-7|9)$ und $Q(12|12|8)$ zu Ebenen der Schar E_t gehören.

b) Prüfen Sie, ob es Ebenen der Schar gibt, die aufeinander senkrecht stehen. Welcher Zusammenhang besteht gegebenenfalls zwischen den zugehörigen Parameterwerten?