§ 9 Parametergleichung einer Geraden - Lösung

1. Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch A in Richtung $\vec{u}$ verläuft.

a) $A\left(0|3|1\right)$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

b) $A\left(0|0|0\right)$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ $\qquad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

2. Gegeben ist die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$. Berechne die Punkte P_i, die zu den Parameterwerten λ_i gehören.

$\lambda_1=1;\ \lambda_2=0;\ \lambda_3=-1,5;\ \lambda_4=100$

$P_1\left(6|-2|0\right);\ P_2\left(2|0|-1\right);\ P_3\left(-4|3|-2,5\right);\ P_4\left(402|-200|99\right)$

3. Stelle die Gleichung der Geraden g auf, die durch $A\left(1|2|3\right)$ geht und parallel ist zur

a) x_1-Achse $\qquad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

b) x_3-Achse $\qquad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

c) Geraden $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}$ $\qquad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}$

Bemerkung: Zwei Geraden sind zueinander parallel, wenn die beiden Richtungsvektoren bis auf ein Vielfaches übereinstimmen.

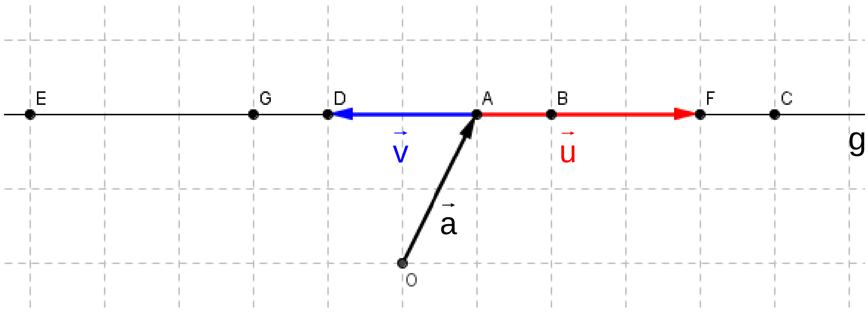
4. Beschreibe die besondere Lage der Geraden im Koordinatensystem

a) $a:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$ $\qquad$ Gerade ist identisch mit der x_1-Achse

b) $b:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad$ Gerade ist parallel zur x_3-Achse

Bemerkung: Eine Gerade ist genau dann parallel zu einer Achse, wenn der Richtungsvektor zwei Nullen hat. Sie ist dann parallel zu der Achse, deren Wert im Richtungsvektor ungleich Null ist.

5.0 Gegeben ist eine Gerade g mit dem Stützvektor $\vec{a}$ und dem Richtungsvektor $\vec{u}$ durch die Gleichung $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$.



5.1 Lesen Sie die $\lambda -$Werte ab, die zu den eingezeichneten Punkten gehören.

$\lambda_A = 0; \lambda_B = \frac{1}{3}; \lambda_C = \frac{4}{3}; \lambda_D = -\frac{2}{3}; \lambda_E = -2; \lambda_F = 1; \lambda_G = -1$

5.2 Welche Werte gehören zu den eingezeichneten Punkten, wenn g in der Form $g: \vec{x} = \vec{a} + \mu \cdot \vec{v}$ gegeben ist?

$\mu_A = 0; \mu_B = -\frac{1}{2}; \mu_C = -2; \mu_D = 1; \mu_E = 3; \mu_F -1,5; \mu_G = 1,5$

6.0 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6.1 Bestimmen Sie vier Punkte, die auf der Geraden g liegen.

6.2 Geben Sie zwei Punkte an, die vom Aufpunkt den gleichen Abstand haben.

7. Überprüfen Sie, ob die Punkte $P(-5|4|-7)$ und $Q(3|0|4)$ auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ liegen.

$P \in g; Q \notin g$

8. Gegeben sind die beiden Punkte $P(-7|12|18)$ und $Q(3|-8|8)$.

Welcher der Punkte $A(4|-10|7)$, $B(1|-4|10)$, $C(-1|0|-12)$, $D(-9|16|20)$ und $E(-6|10|17)$ liegt

a) auf der Geraden PQ? $A, B, D, E \in g(PQ); C \notin g(PQ)$

b) auf der Strecke $[PQ]$? $A \notin [PQ]; B \in [PQ]; C \notin [PQ]; D \notin [PQ]; E \in [PQ]$

9. Überprüfen Sie, ob die Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen.
   a) $A(4|-2|6)$, $B(2|1|0)$ und $C(0|3|2)$ Nein
   b) $A(-3|-5|0)$, $B(-2|3|4)$ und $C(-1|11|8)$ Ja
10. Prüfen Sie, ob es Zahlen $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen.
   a) $A(1|2|3)$, $B(2|k|0)$ und $C(1|1|1)$ geht nicht!
   b) $A(1|2|-1)$, $B(2|1|2)$ und $C(-3|6|k)$ $k=-13$
11. Gegeben ist die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\5\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$, sowie die Punkte $A(13|a|8)$,

   $B(-12|k|-k)$, $C(c|1|1)$, $D(2k|-3k|k)$ und $E(4k_1-3|1|2k_2)$. Berechne die fehlenden Koordinaten von A bis E so, dass diese Punkte auf der Geraden g liegen.

   $A(13|-3|8)$, $B(-12|7|-7)$, $C \notin g$, $D(-2|3|-1)$, $E(3|1|2)$.

12. Liegen die Punkte P_a auf einer Geraden? Stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Geraden auf.
   a) $P_a(1+2a|2-7a|-1-2a)$
   b) $P_a(3a-2|4|-6a)$
   c) $P_a(a|1|0)$
   d) $P_a(1+a|1-a|a+1)$
   e) $P_a(a^2|a|a+1)$
   f) $P_a\left(\frac{2}{a}|0|\frac{1}{a}\right)$
13. Zeigen Sie, dass folgende Punkte auf einer Geraden liegen und beschreiben Sie die Lage dieser Geraden im Koordinatensystem.
   a) $P_a(1-a|0|1)$
   b) $P_a(1|a^3|0)$