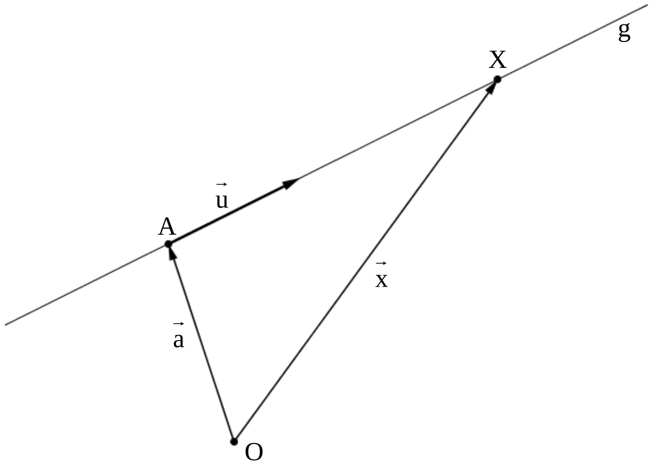
§ 9 Parametergleichung einer Geraden

Die Lage einer Geraden g im Raum ist durch zwei Größen eindeutig festgelegt:

1. Ihre Richtung: Diese wird durch den Richtungsvektor festgelegt.
2. Einen Punkt A, durch den die Gerade verläuft.



9.1 Parametergleichung einer Geraden

Für jeden Punkt X auf der Geraden g gilt dann:

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \vec{u} \text{ mit einem geeigneten } \lambda \in \mathbb{R}$$

Formt man etwas um, so erhält man:

$$\vec{x} - \vec{a} = \lambda \cdot \vec{u}$$
$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$

Somit lässt sich jeder Punkt X auf der Geraden g beschreiben durch $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$.

Die Gleichung $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt <u>Parametergleichung</u> der Geraden g. Der Ortsvektor $\vec{a}$ zum Punkt A heißt <u>Stützvektor</u> (oder auch Aufpunktvektor), der Vektor $\vec{u}$ <u>Richtungsvektor</u> der Geraden.
Somit gilt: $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$

<u>Bemerkung</u>:
Da jeder Punkt der Geraden g als Stützpunkt und jedes Vielfache von $\vec{u}$ als Richtungsvektor verwendet werden kann, gibt es zu ein und derselben Geraden unendlich viele Parametergleichungen.

Aufgaben:

1. Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch A in Richtung $\vec{u}$ verläuft.

   a) $A(0|3|1)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   b) $A(0|0|0)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne die Punkte P_i, die zu den Parameterwerten λ_i gehören.

$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 0;\ \lambda_3 = -1{,}5;\ \lambda_4 = 100$

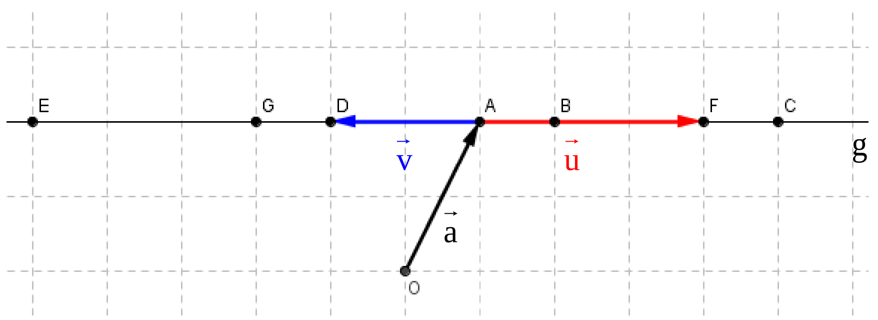
3. Stelle die Gleichung der Geraden g auf, die durch $A(1|2|3)$ geht und parallel ist zur
   a) x_1 – Achse
   b) x_3 – Achse
   c) Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Zwei Geraden sind zueinander parallel, wenn die beiden Richtungsvektoren bis auf ein Vielfaches übereinstimmen.

4. Beschreibe die besondere Lage der Geraden im Koordinatensystem
   a) $a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   b) $b: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Eine Gerade ist genau dann parallel zu einer Achse, wenn der Richtungsvektor zwei Nullen hat. Sie ist dann parallel zu der Achse, deren Wert im Richtungsvektor ungleich Null ist.

5.0 Gegeben ist eine Gerade g mit dem Stützvektor $\vec{a}$ und dem Richtungsvektor $\vec{u}$ durch die Gleichung $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$.



5.1 Lesen Sie die λ – Werte ab, die zu den eingezeichneten Punkten gehören.
5.2 Welche Werte gehören zu den eingezeichneten Punkten, wenn g in der Form $g: \vec{x} = \vec{a} + \mu \cdot \vec{v}$ gegeben ist?

6.0 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6.1 Bestimmen Sie vier Punkte, die auf der Geraden g liegen.

6.2 Geben Sie zwei Punkte an, die vom Aufpunkt den gleichen Abstand haben.

7. Überprüfen Sie, ob die Punkte $P(-5|4|-7)$ und $Q(3|0|4)$ auf der Geraden

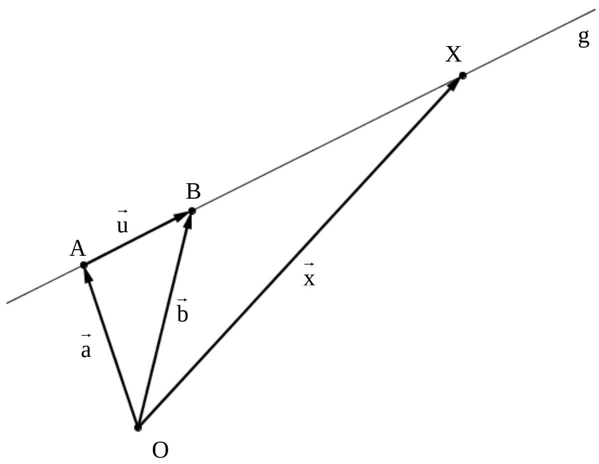
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ liegen.

9.2 Zwei-Punkte-Gleichung einer Geraden

Eine Gerade ist auch durch die Angabe zweier verschiedener Punkt A und B eindeutig festgelegt.

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g lässt sich mit Hilfe der beiden Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ angeben. Es gilt:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$



Die Gleichung

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

heißt <u>Zwei-Punkte-Gleichung</u> der Geraden g durch die Punkte A und B.

Aufgaben:

8. Gegeben sind die beiden Punkte $P(-7|12|18)$ und $Q(3|-8|8)$.

   Welcher der Punkte $A(4|-10|7)$, $B(1|-4|10)$, $C(-1|0|-12)$, $D(-9|16|20)$ und $E(-6|10|17)$ liegt

   a) auf der Geraden PQ?

   b) auf der Strecke $[PQ]$?

9. Überprüfen Sie, ob die Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen.

   a) $A(4|-2|6)$, $B(2|1|0)$ und $C(0|3|2)$

   b) $A(-3|-5|0)$, $B(-2|3|4)$ und $C(-1|11|8)$

10. Prüfen Sie, ob es Zahlen $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

    a) $A(1|2|3)$, $B(2|k|0)$ und $C(1|1|1)$

    b) $A(1|2|-1)$, $B(2|1|2)$ und $C(-3|6|k)$

11. Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, sowie die Punkte $A(13|a|8)$, $B(-12|k|-k)$, $C(c|1|1)$, $D(2k|-3k|k)$ und $E(4k_1-3|1|2k_2)$. Berechne die fehlenden Koordinaten von A bis E so, dass diese Punkte auf der Geraden g liegen.

9.3 Punktschar

Wie wir oben in den Aufgaben gesehen haben, kommt es auch vor, dass ein allgemeiner Punkt z. B. in der Form $P_a(3+a|2a|3-a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ angegeben wird.

Dabei handelt es sich um eine Schar von Punkten. Alle diese Punkte bilden dann eine Kurve. Kommt der Parameter nur linear, dann ist diese Kurve eine Gerade. Die entsprechende Geradengleichung lässt sich folgendermaßen bestimmen. Dazu formt man den Ortsvektor $\vec{p}_a$ lediglich etwas um.

$$\vec{p}_a = \begin{pmatrix} 3+a \\ 2a \\ 3-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+a \\ 0+2a \\ 3-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

Die Punkte P_a liegen also auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(sie bilden die Gerade g).

Aufgaben:

12. Liegen die Punkte P_a auf einer Geraden? Stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Geraden auf.
    a) $P_a(1+2a|2-7a|-1-2a)$
    b) $P_a(3a-2|4|-6a)$
    c) $P_a(a|1|0)$
    d) $P_a(1+a|1-a|a+1)$
    e) $P_a(a^2|a|a+1)$
    f) $P_a(\frac{2}{a}|0|\frac{1}{a})$
13. Zeigen Sie, dass folgende Punkte auf einer Geraden liegen und beschreiben Sie die Lage dieser Geraden im Koordinatensystem.
    a) $P_a(1-a|0|1)$
    b) $P_a(1|a^3|0)$

       Vergleiche mit $P_a(1|a^2|0)$! Worin liegt der Unterschied?

9.4 Halbgeraden und Strecken

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Wählt man $\lambda \in \mathbb{R}$, so erhält man die komplette Gerade g.

b) Wählt man $\lambda \geq 0$, so erhält man eine Halbgerade mit den Anfangspunkt $A\left(1\middle|-2\middle|4\right)$, welche in die Richtung des Richtungsvektors der Geraden g verläuft.

$$\lambda = 0: \ \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ A\left(1\middle|-2\middle|4\right)$$

c) Wählt man $\lambda \in [-2;4]$, so erhält man die Strecke $[AB]$ mit den Punkten

$$\lambda = -2: \ \vec{x}_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ A\left(5\middle|-4\middle|2\right)$$

$$\lambda = 4: \ \vec{x}_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ B\left(-7\middle|2\middle|8\right)$$

Gegeben sind die Punkte $A\left(-3\middle|2\middle|0\right)$ und $B\left(1\middle|-5\middle|3\right)$. Dann wird die Strecke $[AB]$ durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1-3 \\ -5+2 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in [0;1]$$