§ 8 Vektorprodukt - Lösung

1. Berechne

a) $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2-1\cdot2\\1\cdot(-1)-2\cdot2\\2\cdot2-2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot6-3\cdot5\\3\cdot4-1\cdot6\\1\cdot5-2\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}5\\-15\\25\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-12\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\cdot20-25\cdot(-12)\\25\cdot4-5\cdot20\\5\cdot(-12)-(-15)\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel

d) $\begin{pmatrix}a\\a+1\\-a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a-1\\-a\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a+1)\cdot a-(-a)\cdot(-a)\\a\cdot a-(-a)\cdot(a-1)\\a\cdot(-a)-(a+1)\cdot(a-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-2a^2+a\\-2a^2+1\end{pmatrix}$

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$

a) Berechne $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ und $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ und vergleiche.

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\begin{pmatrix}-20\\30\\10\end{pmatrix};\ \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{pmatrix}-1\\13\\15\end{pmatrix}$

b) Stelle $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. Deute dies geometrisch

.

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=-14\vec{a}+8\vec{b}$

Bedeutung: Der Vektor $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ liegt in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

3. Berechne die Fläche des Parallelogramms ABCD
Zusatz: Berechne auch den Umfang, die Innenwinkel und die Koordinaten des Punktes D des Parallelogramms!

a) $A(0|0|0), B(1|0|-3), C(-4|6|-1)$

$F=23;\ D(-5|6|2);\ U=2\left(\sqrt{10}+\sqrt{65}\right)\approx22{,}45;\ \alpha=\gamma=64{,}44°;\ \beta=\delta=115{,}56°$

b) $A(1|0|-1), B(1|-3|3), C(5|3|2)$

$F=29;\ D(5|6|-2);\ U=10+2\sqrt{53}\approx24{,}6;\ \alpha=\gamma=127{,}18°;\ \beta=\delta=52{,}82°$

4. Berechne die Fläche des Dreiecks ABC
   Zusatz: Berechne auch den Umfang und die Innenwinkel des Dreiecks!
   a) $A(-2|2|-3), B(0|0|0), C(3|-2|0)$ $\quad F = 5,5$
   b) $A(3|2|-1), B(5|-2|1), C(7|-2|-5)$ $\quad F = 14$

5. Bestimme die Länge der Höhe h_c im Dreieck ABC mit
   $A(5|2|6), B(7|0|9), C(0|-2|1)$ $\quad h_c = 7$

6. Ein Dreieck ABC wird von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufgespannt.
   a) Berechne sämtliche Innenwinkel.
   b) Berechne die Fläche des Dreiecks ABC.
   c) Berechne die Höhen h_a, h_b und h_c.

7. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ 23 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 22 \\ -2a \end{pmatrix}$
   a) Berechne $a \in \mathbb{R}$ so, dass das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Dreieck gleichschenklig ist.
   b) Berechnen Sie für $a = 7$ einen Vektor, der den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ halbiert.
   c) Berechnen Sie die Höhe h_c.
   d) Berechnen Sie den Vektor h_c.

8. Berechne das Volumen V des von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Prismas:
   a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad V = 72$
   b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad V = 8$

9. Berechne das Volumen V der dreiseitigen Pyramide ABCS
   a) $A(1|1|1), B(1|4|4), C(4|1|4), S(4|4|1)$ $\quad V = 9$
   b) $A(-1|-1|-1), B(0|0|-2), C(0|-2|0), S(-2|0|0)$ $\quad V = \frac{2}{3}$
   c) $A(0|0|0), B(1|2|3), C(4|5|6), S(7|8|9)$ $\quad V = 0$

10. Berechne das Volumen der (vierseitigen) Pyramide ABCDS mit
    $A(1|1|5), B(5|1|5), C(2|5|5), D(0|3|5)$, Spitze $S(4|1|-1)$ $\quad V = 16$