§ 8 Vektorprodukt

8.1 Das Vektorprodukt

Gegeben seien zwei (komplanare) Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die eine Ebene aufspannen.
Sucht man einen Vektor $\vec{n}$, der auf diese Ebene senkrecht steht, dann muss $\vec{n}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{n}$ orthogonal zu $\vec{b}$ sein.
Also gilt:

$$\vec{a} \perp \vec{n} \quad \wedge \quad \vec{b} \perp \vec{n}$$

Somit folgt:

$$\vec{a} \circ \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 = 0$$

$$\vec{b} \circ \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 = 0$$

Dieses Gleichungssystem muss man nun lösen!
Das ist allerdings nicht ganz einfach. Die Lösung lautet:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

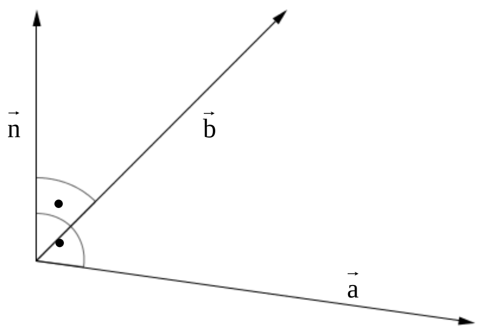
Wer es nicht glaubt, der kann nun zeigen, dass $\vec{a} \circ \vec{n} = 0$ und $\vec{b} \circ \vec{n} = 0$ gilt.

<u>Definition</u>: (Vektorprodukt)

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$

heißt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Anmerkungen:

- Das Vektorprodukt ist nur für Vektoren des $\mathbb{R}^3$ definiert. Für Vektoren des $\mathbb{R}^2$ gibt es kein Vektorprodukt.
- Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist wieder ein Vektor. Das Skalarprodukt zweier Vektoren liefert eine Zahl (Skalar).
- Zur Berechnung des Vektorprodukts hilft zum Glück die Formelsammlung oder auch folgendes Schema:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

Aufgaben:

1. Berechne

 a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

 b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} =$

 c) $\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix} =$

 d) $\begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a-1 \\ -a \\ a \end{pmatrix} =$

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

 a) Berechne $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ und $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ und vergleiche.

 b) Stelle $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. Deute dies geometrisch.

8.2 Rechengesetze für das Vektorprodukt

Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$	Alternativgesetz
$\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \cdot \vec{b}\right)$	Verträglichkeit S-Multiplikation
$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$	Distributivgesetz

$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ sind linear unabhängig

8.3 Der Normalenvektor

Der Vektor $\vec{n}$ stehe auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht, also insbesondere auch auf die Ebene, die von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.
Den Vektor $\vec{n}$ nennt man Normalenvektor, er ist bis auf ein Vielfaches eindeutig festgelegt.
(Anwendung: Geometrie; Physik; E-Technik; Maschinenbau; Bauingenieur)

Definition: Den Normalenvektor $\vec{n}$ zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhält man durch das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Es gilt:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt also: $\vec{n} \circ \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \circ \vec{b} = 0$

Die Richtung des Normalenvektors $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ lässt sich mit der Rechten-Hand-Regel bestimmen:
Zeigt der Daumen der rechten Hand in die Richtung des Vektors $\vec{a}$, der Zeigefinger in Richtung des Vektors $\vec{b}$, dann zeigt der (rechtwinklig) gespreizte Mittelfinger in die Richtung des Normalenvektors $\vec{n}$. Der Normalenvektor steht dabei auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene senkrecht.
Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden somit in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Beispiel 1:
Ein Magnetfeld mit der Flussdichte $\vec{B}$ übt auf ein mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegtes Teilchen, das die Ladung Q trägt die (Lorentz-) Kraft $\vec{F}_L$ aus.

$$\vec{F}_L = Q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Beispiel 2:
Eine Kraft $\vec{F}$ die auf den Kraftarm $\vec{r}$ wirkt übt ein Drehmoment $\vec{M}$ aus.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

8.4 Flächenberechnung

Es stellt sich die Frage, was die Länge des Vektorprodukts $\vec{a}\times\vec{b}$ angibt?
Damit keine Wurzeln auftreten berechnen wir

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left\|\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\right\|^2$$

$$=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2$$

$$=a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2-2a_1a_3b_1b_3+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2$$

$$=a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2-2a_1a_3b_1b_3+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2+$$
$$\underbrace{+a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2-\left(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2\right)}_{\text{Trick!}}$$

$$=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2-$$
$$-\left(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2+2a_2a_3b_2b_3+2a_1a_3b_1b_3+2a_1a_2b_1b_2\right)$$

$$=a_1^2\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)+a_2^2\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)+a_3^2\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$$

$$=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\circ\vec{b}\right|^2=a^2b^2-\left(ab\cos\rho\right)^2$$

$$\cos\rho=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{ab}\Rightarrow\vec{a}\circ\vec{b}=ab\cos\rho$$

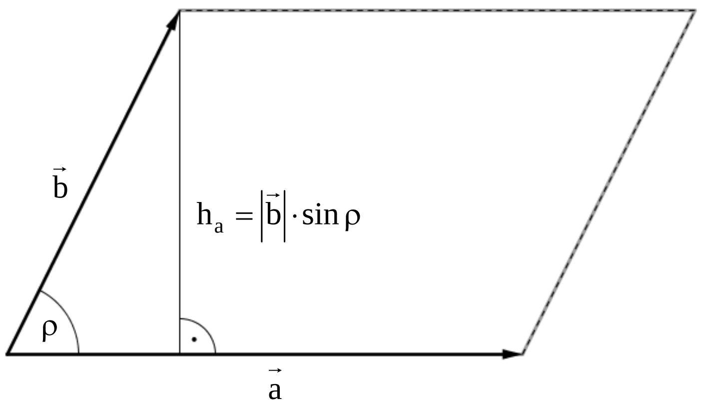
$$=a^2b^2-a^2b^2\cos^2\rho$$

$$=a^2b^2\left(1-\cos^2\rho\right)$$

$$=a^2b^2\sin^2\rho$$

$$=\left(ab\sin\rho\right)^2$$

also: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left(ab\sin\rho\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=ab\sin\rho$



$$ab\sin\rho=ah_a=F_{\text{Parallelogramm}}$$

Der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ergibt sich aus der Länge des Vektorprodukts von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\boxed{F_P=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=ab\sin\rho}$$

Für den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks ABC gilt dann:

$$\boxed{F_{\triangle ABC} = \tfrac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$$

Aufgaben:

3. Berechne die Fläche des Parallelogramms ABCD
   Zusatz: Berechne auch den Umfang, die Innenwinkel und die Koordinaten des Punktes D des Parallelogramms!
   a) $A(0|0|0), B(1|0|-3), C(-4|6|-1)$
   b) $A(1|0|-1), B(1|-3|3), C(5|3|2)$

4. Berechne die Fläche des Dreiecks ABC
   Zusatz: Berechne auch den Umfang und die Innenwinkel des Dreiecks!
   a) $A(-2|2|-3), B(0|0|0), C(3|-2|0)$
   b) $A(3|2|-1), B(5|-2|1), C(7|-2|-5)$

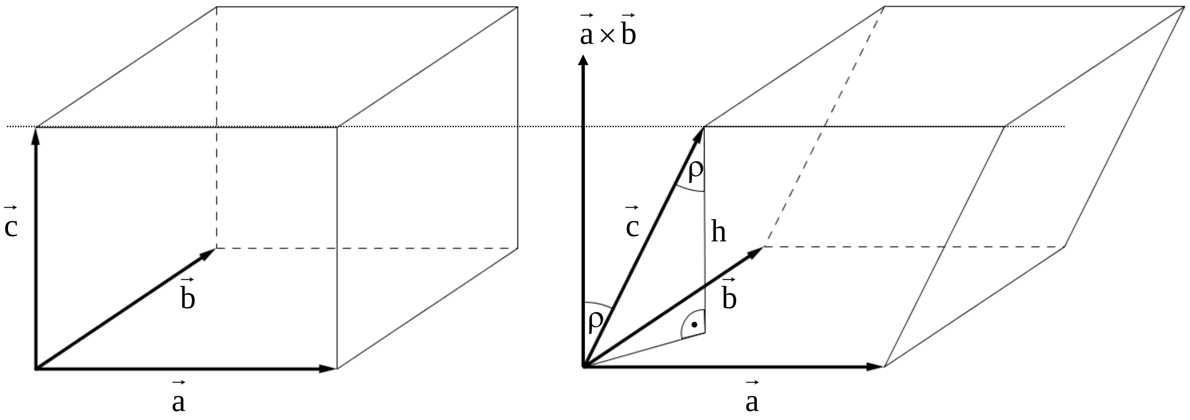
5. Bestimme die Länge der Höhe h_c im Dreieck ABC mit
   $A(5|2|6), B(7|0|9), C(0|-2|1)$

6. Ein Dreieck ABC wird von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufgespannt.
   a) Berechne sämtliche Innenwinkel.
   b) Berechne die Fläche des Dreiecks ABC.
   c) Berechne die Höhen h_a, h_b und h_c.

7. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ 23 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 22 \\ -2a \end{pmatrix}$
   a) Berechne $a \in \mathbb{R}$ so, dass das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Dreieck gleichschenklig ist.
   b) Berechnen Sie für $a = 7$ einen Vektor, der den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ halbiert.
   c) Berechnen Sie die Höhe h_c.
   d) Berechnen Sie den Vektor h_c.

8.5 Volumenberechnung

Schert man ein gerades Prisma parallel zur Grundfläche, dann bleiben Grundfläche und Höhe gleich. Nach CAVALIERI ist dann auch das Volumen gleich $V = G \cdot h$



Es gilt:

$$G = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

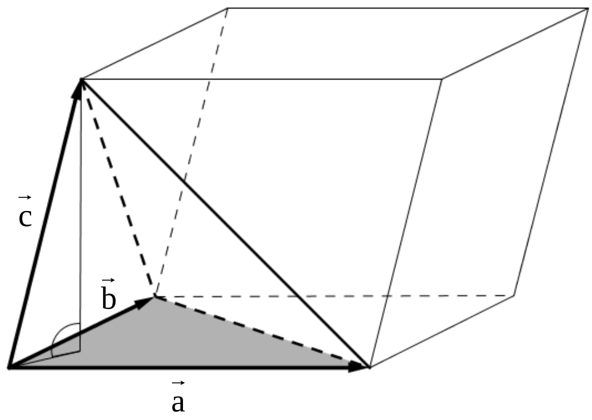
$$\cos\rho = \frac{h}{c} \quad \Rightarrow \quad h = c\left|\cos\rho\right| = \left|\vec{c}\right| \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|} = \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$$

$$V_{\text{Spat}} = G \cdot h = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$$

Wird ein Spat durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt, so gilt für sein Volumen:

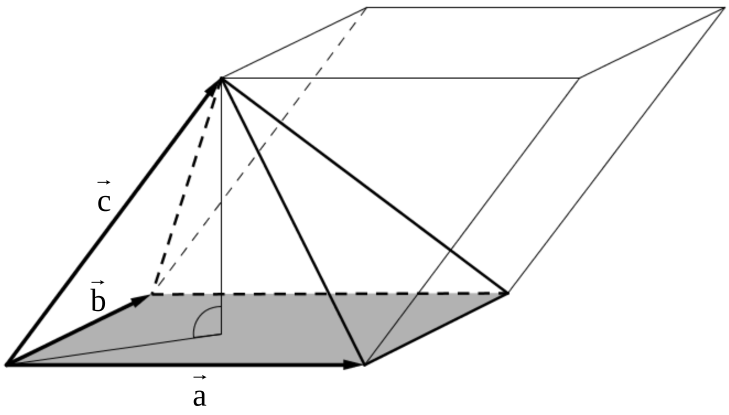
$$V_{\text{Spat}} = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right| = \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$

Für das Volumen einer dreiseitigen Pyramide (reguläres Tetraeders), das von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, gilt:



$$V_{\text{3-seitige Pyramide}} = \tfrac{1}{6} \cdot \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right| = \tfrac{1}{6} \cdot \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$

Für das Volumen einer vierseitigen Pyramide, das von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird gilt:



$$V_{4-\text{seitige Pyramide}} = \tfrac{1}{3} \cdot \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right| = \tfrac{1}{3} \cdot \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$

Aufgaben:

8. Berechne das Volumen V des von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Prismas:
   a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
9. Berechne das Volumen V der dreiseitigen Pyramide ABCS
   a) $A\left(1|1|1\right), B\left(1|4|4\right), C\left(4|1|4\right), S\left(4|4|1\right)$
   b) $A\left(-1|-1|-1\right), B\left(0|0|-2\right), C\left(0|-2|0\right), S\left(-2|0|0\right)$
   c) $A\left(0|0|0\right), B\left(1|2|3\right), C\left(4|5|6\right), S\left(7|8|9\right)$
10. Berechne das Volumen der (vierseitigen) Pyramide ABCDS mit
    $A\left(1|1|5\right), B\left(5|1|5\right), C\left(2|5|5\right), D\left(0|3|5\right)$, Spitze $S\left(4|1|-1\right)$