§ 7 Längenberechnungen – Winkelberechnungen – Skalarprodukt - Lösung

1. Berechne die Länge der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = 13$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{b}| = 13$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ 16 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{c}| = 25$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a(a+1) \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1}$$

2. Zeige, dass die Punkte auf einer Kugel um den Ursprung liegen:
   a) $A(26|-7|2); B(25|10|-2); C(2|14|23); D(-7|-14|-22)$
   b) $A(12|4|39); B(33|4|24); C(32|9|24); D(31|24|12); E(23|24|24)$

3. Berechne $a \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:

a) $\left|\begin{pmatrix} 3a \\ -6a \\ 2a \end{pmatrix}\right| = 14$ $\qquad a_{1/2} = \pm 2$

b) $\left|\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a-1 \end{pmatrix}\right| = 7$ $\qquad a_{1/2} = \begin{cases} -\frac{8}{3} \\ 3 \end{cases}$

c) $\left|\begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ a \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 2$ $\qquad a_1 = \text{n.d.}$

d) $\left|\begin{pmatrix} a \\ a \\ a-1 \end{pmatrix}\right| = 3$ $\qquad a_1 = 2; a_2 = -1\frac{1}{3}$

e) $\left|\begin{pmatrix} a^2-5 \\ a \\ a^2+3 \end{pmatrix}\right| = 13$ $\qquad a_{1/2} = \pm 3$

4. a) Berechne die Einheitsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}; \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \vec{e} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \ \vec{f} = \begin{pmatrix} -3a \\ 2,4a \\ 3,2a \end{pmatrix}$$

$\vec{a}^0 = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{b}^0 = \frac{1}{21}\cdot\begin{pmatrix}7\\14\\14\end{pmatrix}$; $\vec{c}^0 = \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}0,5\\1\\1\end{pmatrix}$;

$\vec{d}^0 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{e}^0 = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}$; $\vec{f}^0 = \frac{1}{5a}\cdot\begin{pmatrix}-3a\\2,4a\\3,2a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,6\\0,48\\0,64\end{pmatrix}$

b) Berechne $a \in \mathbb{R}$, dass folgende Vektoren zu Einheitsvektoren werden.

$\vec{a} = \begin{pmatrix}a\\2a\\2a\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\a\\-a\end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix}a+1\\a-1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad a_{1/2} = \pm\frac{1}{3}$; n.d.; n.d.

5. Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:
   a) $A(6|3|-4), B(8|6|2), C(2|9|8)$ $\qquad U = 30$
   b) $A(1|-6|-6), B(2|2|-2), C(0|-2|2)$ $\qquad U = 24$
6. Weise nach, dass $M(0|1|2)$ der Mittelpunkt einer Kugel ist, auf der die Punkte $A(2|-1|3)$, $B(2|0|4)$ und $C(-1|3|4)$ liegen.
7. Gegeben sind die Punkte $P(1|2|8)$ und $T(4|4+t|6+t)$ mit $t \in \mathbb{R}$. Bestimme $t \in \mathbb{R}$ so, dass die beiden Punkte einen Abstand von 5 LE haben. Gib T an!
   $t_{1/2} = \pm 2$; $T_1(4|6|8)$, $T_2(4|2|4)$

8. Berechne die Winkel zwischen den beiden Vektoren
   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix}$ $\qquad \rho \approx 97,95°$
   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\0\\-8\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}12\\3\\4\end{pmatrix}$ $\qquad \rho \approx 72,08°$
   c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ $\qquad \rho \approx 114,79°$
   d) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ $\qquad \rho = 90°$

9. Zeige, dass die gegebenen Vektoren einen Würfel aufspannen und berechne sein Volumen.
   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\qquad V_W = 27$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}10\\-5\\10\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-11\\-2\\10\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\14\\5\end{pmatrix}$ $V_W=15^3=3375$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\a+1\\a(a+1)\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}a+1\\-a(a+1)\\a\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}a(a+1)\\a\\-a-1\end{pmatrix}$

10. Für welche Werte von u sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal?

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\u\\2u\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-u\\14\\-u\end{pmatrix}$ $u_1=0;\ u_2=6,5$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}u+1\\2-u\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}u\\u+2\\u+4\end{pmatrix}$ $u\in\mathbb{R}$

11. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}k-2\\2\\k\end{pmatrix}$ mit $k\in\mathbb{R}$. Bestimme $k\in\mathbb{R}$ so, dass $\rho=\sphericalangle\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ folgende Werte annimmt:

a) $\rho=90°$ $k=1$

b) $\rho=60°$ $k_1=2$; $(k_2=0)$

c) $\rho=120°$ $(k_1=2)$; $k_2=0$

d) $\rho=45°$ $k_{1/2}=\begin{cases}1+\sqrt{3}\\1-\sqrt{3}\end{cases}$

12. Berechne die Winkel des Dreiecks ABC

a) $A(6|3|-4), B(8|6|2), C(2|9|8)$ $\alpha=33,4°$ $\beta=121,6°$ $\gamma=25,2°$

b) $A(1|-6|-6), B(2|2|-2), C(0|-2|2)$ $\alpha=15,1°$ $\beta=14,4°$ $\gamma=150,5°$

13. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion $\vec{b}_a$ von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.