§ 7 Längenberechnungen – Winkelberechnungen - Skalarprodukt

Wir wissen, wie man zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ bzw. subtrahiert $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

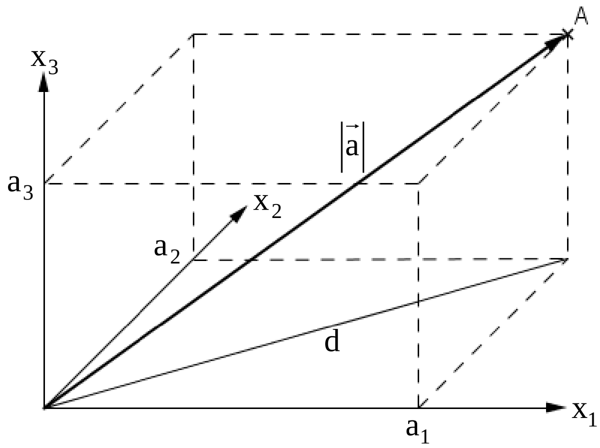
Man kann zwei Vektoren aber auch miteinander „multiplizieren“!
In der analytischen Geometrie gibt es zwei Arten der Vektor-Mulitplikation. Das Skalarprodukt und das Vektorprodukt (siehe später!). Jedes dieser beiden Produkte besitzt eine eigene Schreibweise, jedes hat seine eigene Bedeutung.

7.1 Länge eines Vektors

Wir betrachten in einem kartesischen Koordinatensystem den Ortsvektor

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

des Punktes A.



Die Länge eines Vektors bezeichnet man allgemein mit $\left|\vec{a}\right|$ oder kurz a: $\left|\vec{a}\right| = a$

Die Länge des Vektors $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ entspricht der Länge der Raumdiagonalen im eingezeichneten Quader. Somit folgt:

$$a^2 = d^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a}\right| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

<u>Definition</u>: (Länge eines Vektors)
Der $\left|\vec{a}\right|$ gibt die Länge des Vektors $\vec{a}$ an. Somit gilt im

$\mathbb{R}^2$: $\quad \vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\mathbb{R}^3$: $\quad \vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Beispiele: Berechne die Länge der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \ldots = \sqrt{29}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \ldots = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\vec{c}\right| = \ldots = 1 \\ \left|\vec{d}\right| = \ldots = 1 \end{array}\right\} \text{Einheitsvektoren}$$

<u>Definition</u>: (Einheitsvektoren)
Hat ein Vektor $\vec{a}$ die Länge 1, so nennt man ihn auch einen Einheitsvektor. Dafür schreibt man:

$$\vec{a}^{\,0}$$

Es gilt: $\left|\vec{a}^{\,0}\right| = 1$

Möchte man den Einheitsvektor eines beliebigen Vektors $\vec{b}$, so gilt für diesen:

$$\vec{b}^{\,0} = \tfrac{1}{b} \cdot \vec{b}$$

Das ist ein Vektor der Länge 1 in Richtung des Vektors $\vec{b}$.

Beispiel: Gib den Einheitsvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ an.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}^{\,0} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

7.2 Abstand zweier Punkte

Den Abstand der Punkte A und B erhält man aus der Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.
Beispiel: Bestimme den Abstand der Punkt $A(-4|1|3)$ und $B(0|-2|3)$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ -2-1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Aufgaben:

1. Berechne die Länge der Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-12\\-3\end{pmatrix};\ \vec{c}=\begin{pmatrix}12\\-15\\16\end{pmatrix};\ \vec{d}=\begin{pmatrix}a\\a+1\\a(a+1)\end{pmatrix}$$

2. Zeige, dass die Punkte auf einer Kugel um den Ursprung liegen:
   a) $A(26|-7|2);\ B(25|10|-2);\ C(2|14|23);\ D(-7|-14|-22)$
   b) $A(12|4|39);\ B(33|4|24);\ C(32|9|24);\ D(31|24|12);\ E(23|24|24)$

3. Berechne $a\in\mathbb{R}$ so, dass gilt:

   a) $\left|\begin{pmatrix}3a\\-6a\\2a\end{pmatrix}\right|=14$ b) $\left|\begin{pmatrix}a\\2a\\a-1\end{pmatrix}\right|=7$ c) $\left|\begin{pmatrix}\frac{11}{5}\\a\\2\end{pmatrix}\right|=2$

   d) $\left|\begin{pmatrix}a\\a\\a-1\end{pmatrix}\right|=3$ e) $\left|\begin{pmatrix}a^2-5\\a\\a^2+3\end{pmatrix}\right|=13$

4. a) Berechne die Einheitsvektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}7\\14\\14\end{pmatrix};\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0,5\\1\\1\end{pmatrix};\ \vec{d}=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix};\ \vec{e}=\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix};\ \vec{f}=\begin{pmatrix}-3a\\2,4a\\3,2a\end{pmatrix}$$

   b) Berechne $a\in\mathbb{R}$, dass folgende Vektoren zu Einheitsvektoren werden.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\2a\\2a\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\a\\-a\end{pmatrix};\ \vec{c}=\begin{pmatrix}a+1\\a-1\\1\end{pmatrix}$$

5. Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:
   a) $A(6|3|-4),\ B(8|6|2),\ C(2|9|8)$
   b) $A(1|-6|-6),\ B(2|2|-2),\ C(0|-2|2)$

6. Weise nach, dass $M(0|1|2)$ der Mittelpunkt einer Kugel ist, auf der die Punkte $A(2|-1|3)$, $B(2|0|4)$ und $C(-1|3|4)$ liegen.

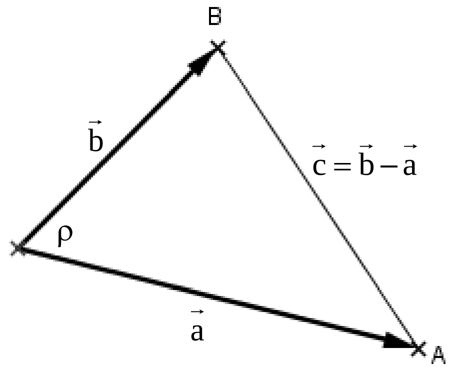
7. Gegeben sind die Punkte $P(1|2|8)$ und $T(4|4+t|6+t)$ mit $t\in\mathbb{R}$. Bestimme $t\in\mathbb{R}$ so, dass die beiden Punkte einen Abstand von 5 LE haben. Gib T an!

7.3 Winkelberechnungen

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen einen Winkel $\rho = \sphericalangle(\vec{a};\vec{b})$ ein.

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gegeben, so benötigen wir jetzt noch den Vektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



Nach dem Kosinussatz gilt dann:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\rho$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\rho$$

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\rho$$

$$b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + a_2^2 + b_3^2 - 2a_3b_3 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\rho$$

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\rho$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\rho$$

<u>Definition</u>: Die Zahl $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ heißt Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Somit gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\rho = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{ab}}$

Und mit Hilfe der Einheitsvektoren von $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\cos\rho = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \circ \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}^{\,0} \circ \vec{b}^{\,0}$$

Aufgaben:

8. Berechne den Winkel zwischen den beiden Vektoren

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\0\\-8\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}12\\3\\4\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$

Satz: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen genau dann aufeinander senkrecht (sind zueinander orthogonal), wenn gilt:

$$\boxed{\vec{a}\circ\vec{b}=0}$$

9. Zeige, dass die gegebenen Vektoren einen Würfel aufspannen und berechne sein Volumen.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}10\\-5\\10\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}-11\\-2\\10\end{pmatrix}\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\14\\5\end{pmatrix}$

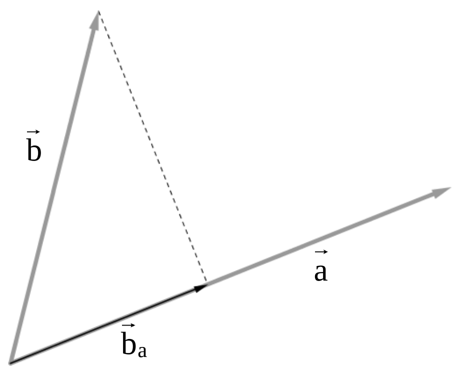
c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\a+1\\a(a+1)\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}a+1\\-a(a+1)\\a\end{pmatrix}\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}a(a+1)\\a\\-a-1\end{pmatrix}$

10. Für welche Werte von u sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal?

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\u\\2u\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}-u\\14\\-u\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}u+1\\2-u\\-1\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}u\\u+2\\u+4\end{pmatrix}$

11. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} k-2 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Bestimme $k \in \mathbb{R}$ so, dass $\rho = \sphericalangle\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ folgende Werte annimmt:
    a) $\rho = 90°$
    b) $\rho = 60°$
    c) $\rho = 120°$
    d) $\rho = 45°$
12. Berechne die Winkel des Dreiecks ABC
    a) $A(6|3|-4), B(8|6|2), C(2|9|8)$
    b) $A(1|-6|-6), B(2|2|-2), C(0|-2|2)$
13. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion $\vec{b}_a$ von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.



7.4 Winkelhalbierender Vektor

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die einen beliebigen Winkel ρ einschließen. Für einen winkelhalbierenden Vektor $\vec{w}$ gilt:

$$\boxed{\vec{w} = \vec{a}^{\,o} + \vec{b}^{\,o}}$$

<u>Bemerkung</u>: Für die Länge eines Vektors gilt auch:

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$$

Rechengesetze für das Skalarprodukt:

(1) Kommutativgesetz: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

(2) Distributivgesetz: $\vec{a} \circ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

(3) Gemischtes Assoziativgesetz: $r\left(\vec{a} \circ \vec{b}\right) = \left(r\vec{a}\right) \circ \vec{b}$ mit $r \in \mathbb{R}$

(4) Für jeden Vektor $\vec{a} \in V$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{a} \circ \vec{a} > 0$

Ein Vektorraum in dem ein Skalarprodukt definiert ist, heißt *euklidisch*.

Ein Assoziativgesetz gibt es für das Skalarprodukt nicht.