

§ 6 Basis und Dimension eines reellen Vektorraums - Lösung

1.) Entscheiden und begründen Sie, ob die Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^2 bilden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \neq \lambda \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind lin. unabh.} \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind Basis}$$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} = -\frac{1}{4}\vec{b} \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind lin. abh.} \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind keine Basis}$$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\vec{c} = 3\vec{a} - 3\vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind lin. abh.} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind keine Basis}$$

2.) Prüfen Sie, ob folgende Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -8 \neq 0; \text{ bilden somit eine Basis}$$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\text{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -27 \neq 0; \text{ bilden somit eine Basis}$$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\text{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0; \text{ bilden somit keine Basis}$$

3.) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 1 \Rightarrow k \in \mathbb{R}$$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$

$$\text{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 5k \Rightarrow k \neq 0$$

4.) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der Basis B mit den

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{c} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

5.) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der Basis B mit den

$$\text{Vektoren } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\text{b) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = 4\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$$

6.) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis des \mathbb{R}^3

bilden und geben Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis an.

$$\vec{a} = 2\vec{c}_1 + \vec{c}_2 + 2\vec{c}_3$$

7.) Geben sie die Koordinaten des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis an.

$$\vec{a} = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

8.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Zeigen Sie, dass diese Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

b) Stellen Sie die Vektoren \vec{e}_1 , \vec{e}_2 und \vec{e}_3 als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dar