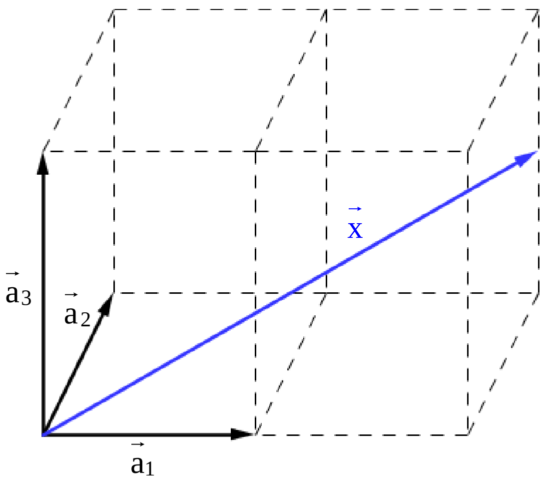
§ 6 Basis und Dimension eines reellen Vektorraums

6.1 Basis und Dimension

Sind $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ drei linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$, so lässt sich jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ in der Form

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \cdot \vec{a}_3$$

darstellen.



Im rechten Beispiel gilt:

$$\vec{x} = 2 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2 + 0{,}5 \cdot \vec{a}_3$$

Im $\mathbb{R}^3$ sind genau drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ notwendig, um jeden beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit diesen Vektoren darstellen zu können.

Definition: (Basis)
Jede Menge linear unabhängiger Vektoren, aus denen sich jeder Vektor des Raumes $\mathbb{R}^3$ bzw. der Ebene $\mathbb{R}^2$ erzeugen lässt, nennt man eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$.

Jede Basis des $\mathbb{R}^2$ besteht aus zwei, jede Basis des $\mathbb{R}^3$ aus drei linear unabhängigen Vektoren.

Definition: (Dimension)
Die Anzahl der Vektoren, die eine Basis bilden nennt man die Dimension

Somit ist die Ebene zweidimensional und der Anschauungsraum dreidimensional.

Aufgaben:

1.) Entscheiden und begründen Sie, ob die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.) Prüfen Sie, ob folgende Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

3.) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}k\\1\\0\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\1\\k\end{pmatrix}$

6.2 Koordinatendarstellung bezüglich einer Basis

Betrachtet man eine Basis $B=\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$, so lässt sich jeder beliebiger Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig in der Form

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2 \cdot \vec{b}_2 + x_3 \cdot \vec{b}_3$$

mit reellen Zahlen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ darstellen.

Die reellen Zahlen x_1, x_2 und x_3 nennt man Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ bezüglich der Basis B.

Beispiel: Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B mit den Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Der Ansatz

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ \hline x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & & & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \Rightarrow\ x_1 = -2 \\ \quad\ \ x_2 = -1 \\ \Rightarrow\ x_3 = 4 \end{array}$$

Somit folgt: $\vec{x} = -2 \cdot \vec{a} - 1 \cdot \vec{b} + 4 \cdot \vec{c}$

Bemerkung: Bezüglich unterschiedlicher Basen besitzt ein Vektor im Allgemeinen auch unterschiedliche Koordinaten.

Aufgaben:

4.) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der Basis B mit den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der Basis B mit den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

6.3 Standardbasis

Eine besonders einfache (kanonische) Basis des $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatendarstellung eines beliebigen Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich dieser Basisvektoren ist sehr einfach:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw.}$$

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

Man bezeichnet die Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ auch als <u>Standardbasis</u> des $\mathbb{R}^3$.

Diese Vektoren bilden zusammen mit dem Punkt O (Ursprung) das uns schon bekannte kartesische (benannt nach dem französischen Mathematiker *René Descartes*; *1596-1650*) Koordinatensystem. Diese Basisvektoren haben alle die Länge 1 und stehen paarweise aufeinander senkrecht.

Aufgaben:

6.) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und geben Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis an.

7.) Geben sie die Koordinaten des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis an.

8.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Zeigen Sie, dass diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Stellen Sie die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.