

§ 5 Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit von Vektoren - Lösung

1.) Untersuchen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ linear abhängig

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

g) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ linear abhängig

h) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

k) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

l) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ linear abhängig

m) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear abhängig

n) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

2.) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren linear abhängig?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 48t - 192 = 0 \Rightarrow t = 4$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -t^2 + t + 6 \Rightarrow t_{1/2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$

3.) Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

$$\text{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

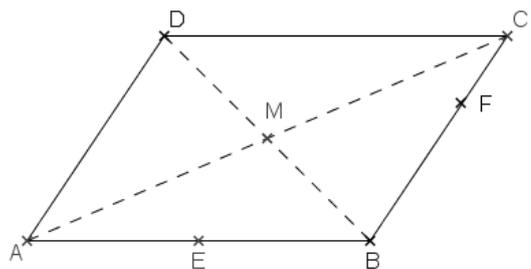
b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1-t \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+t^2 \end{pmatrix}$

$$\text{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 2(1+t^2)^2 = 2t^4 + 4t^2 + 2 \neq 0 \Rightarrow t \in \mathbb{R}$$

4.) Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD. M ist der Diagonalschnittpunkt, E der Mittelpunkt von [AB] und F teilt die Strecke [BC] im Verhältnis 2:1.

Lesen Sie aus der Zeichnung ab, welche der Vektoren linear abhängig sind und geben Sie eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors an.

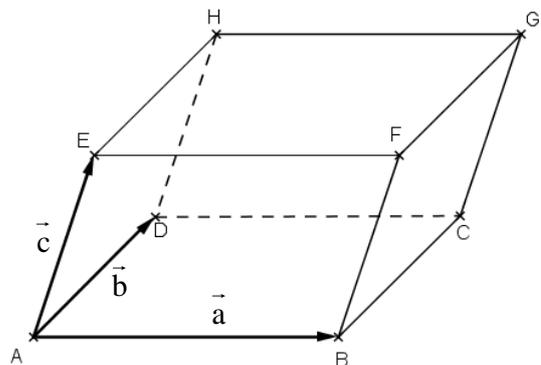
- a) \vec{AE}, \vec{CD} lin. abh. $2\vec{AE} + \vec{CD} = \vec{0}$
- b) \vec{AC}, \vec{BD} lin. unabh.
- c) \vec{ME}, \vec{FC} lin. abh. $2\vec{ME} + 3\vec{FC} = \vec{0}$
- d) \vec{AC}, \vec{EF} lin. unabh.
- e) $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}$ lin. abh. $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$



5.) Gegeben ist ein Spat.

Lesen Sie aus der Zeichnung ab, welche der Vektoren linear unabhängig sind.

- a) \vec{AC}, \vec{HF} lin. unabh.
- b) \vec{BH}, \vec{BD} lin. unabh.
- c) $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}$ lin. unabh.
- d) $\vec{AC}, \vec{EF}, \vec{HG}$ lin. abh.
- e) $\vec{AG}, \vec{DH}, \vec{EG}$ lin. unabh.
- f) $\vec{AF}, \vec{BE}, \vec{DE}$ lin. unabh.
- g) $\vec{CF}, \vec{FD}, \vec{AB}$ lin. unabh.



6.) Bestimmen Sie den Parameter $k \in \mathbb{R}$ ohne große Rechnung so, dass die Vektoren linear abhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -k \\ k \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -k \\ 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

7.) Es seien \vec{a} und \vec{b} linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^3 . Untersuchen Sie folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.

a) $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$

b) $\vec{a} + 3\vec{b}$ und $2\vec{a} + 5\vec{b}$

c) \vec{a} , \vec{b} und $-\vec{a}$

d) $\vec{a} + n \cdot \vec{b}$ und $2\vec{a} - \vec{b}$ mit $n \in \mathbb{N}$

8.) Es seien \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^3 . Untersuchen Sie folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.

a) \vec{a} und \vec{b}

b) \vec{a} , \vec{b} und $\vec{a} - \vec{b}$

c) \vec{a} , $\vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

d) \vec{a} , $2\vec{a} + \vec{b}$ und $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$

e) \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} und $-\vec{a} - 3\vec{b} + 7\vec{c}$

9.) Es seien \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^3 . Untersuchen Sie ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind.

a) $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$ und $\vec{c} - \vec{a}$

b) $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - 3\vec{c}$ und $3\vec{a} - 2\vec{c}$

c) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ und \vec{c}

d) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ und $-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

e) $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $-\vec{a} - 5\vec{b} + 7\vec{c}$ und $\vec{a} - \vec{b}$