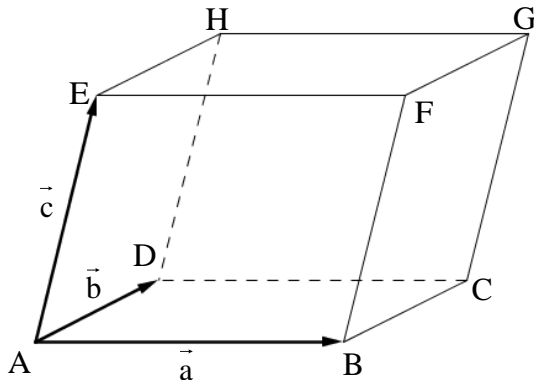


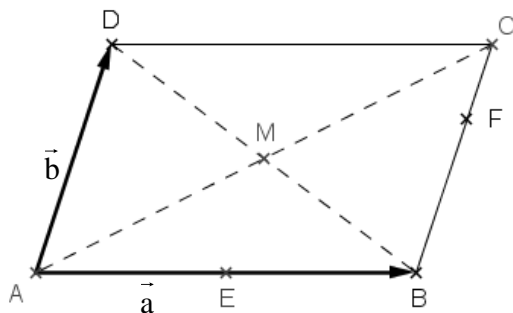
§ 4 Linearkombination von Vektoren - Lösung

1. Gegeben ist ein Spat, der durch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt wird. Schreiben Sie die Vektoren \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BE} , \overrightarrow{BG} und \overrightarrow{HB} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} .



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{BE} &= -\vec{a} + \vec{c} \\ \overrightarrow{BG} &= \vec{b} + \vec{c} \\ \overrightarrow{HB} &= \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$

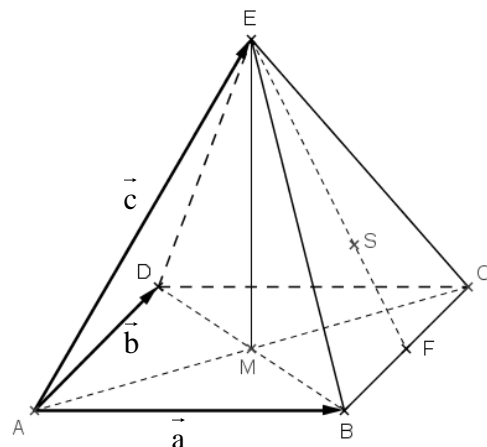
2. Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD, das durch die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird. E halbiert die Strecke [AB], F teilt die Strecke [BC] im Verhältnis 2:1 und M ist der Schnittpunkt der Diagonalen. Schreiben Sie die Vektoren \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{MD} , \overrightarrow{DE} , \overrightarrow{AF} , \overrightarrow{EM} und \overrightarrow{MF} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} und \vec{b} .



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{MD} &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{DE} &= \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} \\ \overrightarrow{AF} &= \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \\ \overrightarrow{EM} &= \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{MF} &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\end{aligned}$$

3. Eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche wird durch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt. M ist der Mittelpunkt des Rechtecks ABCD, S der Schwerpunkt des Dreiecks BCE. Schreiben Sie die Vektoren \overrightarrow{FS} , \overrightarrow{EM} , \overrightarrow{ES} und \overrightarrow{DS} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FS} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{FE} = \dots = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \\ \overrightarrow{EM} &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} \\ \overrightarrow{ES} &= -2 \cdot \overrightarrow{FS} = \dots = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c} \\ \overrightarrow{DS} &= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ES} = \dots = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$



4. Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar.

$$\text{Also: } \vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieser Ansatz liefert ein Gleichungssystem aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda + 2\mu \\ -3 &= 4\lambda + \mu \\ \hline 7 &= -7\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \mu = 1 \end{aligned}$$

$$\text{also: } \vec{v} = -\vec{a} + \vec{b}$$

5. Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 36 \\ 19 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar.

$$\vec{v} = 8\vec{a} - 5\vec{b}$$

6. Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dar.}$$

$$\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$$

7. Stelle die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dar.}$$

Der Vektor \vec{u} lässt sich nicht als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellen.
 Der Vektor \vec{v} lässt sich nicht eindeutig als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellen.

8. Stelle den Vektor \vec{v} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dar.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = -6\vec{a} + 6,4\vec{b} - 6,8\vec{c}$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = -5\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$

d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht möglich!

e) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = (5-k)\vec{a} + (1-2k)\vec{b} + k\vec{c} \quad k \in \mathbb{R}$$

f) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda - 3\mu + 2\gamma &= 1 \\ -\lambda + \mu &= 1 \\ \lambda + \mu - \gamma &= 1 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem erhält man auch so:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \vec{v} \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$$

g) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$

$$h) \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = 3\vec{a} - 12\vec{b} + 9\vec{c}$$

9. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie, ob $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellbar ist.

\vec{u} ist nicht als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellbar!

b) Zeigen Sie: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist als Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellbar.

Zeigen Sie, dass die Darstellung nicht eindeutig ist.

$$\vec{u} = (-1-k) \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} + (5+k) \cdot \vec{c} \quad \text{oder auch} \quad \vec{u} = (4-k) \cdot \vec{a} + (k-5) \cdot \vec{b} + k \cdot \vec{c} \quad \text{oder auch}$$

$$\vec{u} = k \cdot \vec{a} - (k+1) \cdot \vec{b} + (4-k) \cdot \vec{c}$$

c) Auf welche triviale Art ist der Nullvektor $\vec{0}$ als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellbar? Untersuchen Sie, ob sich der Nullvektor $\vec{0}$ noch auf andere Arten als Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellen lässt.

Trivial: $\lambda = \mu = \tau = 0$

Oder: $\lambda = -k$; $\mu = k$; $\tau = k \quad k \in \mathbb{R}$

10. Gegeben sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} des Raumes. Prüfen Sie, ob

a) $\vec{0}$ Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ist.

$$\lambda = \mu = \tau = 0$$

b) \vec{a} Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ist.

$$\lambda = 1; \quad \mu = \tau = 0$$

c) \vec{a} Linearkombination der Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ ist.

$$\lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

d) \vec{b} Linearkombination der Vektoren \vec{a} , $\vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ist.

$$\lambda = 1; \quad \mu = -1; \quad \tau = 0$$

11. Prüfen Sie, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ so gibt, dass der Vektor \vec{v} Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ist.

$$\text{a) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $t=1$ lässt sich der Vektor \vec{v} nicht als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellen.

Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ lässt sich der Vektor \vec{v} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellen.

$$\text{b) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ t-2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -t \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für $t=1$ lässt sich der Vektor \vec{v} nicht als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellen.

Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ lässt sich der Vektor \vec{v} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellen.