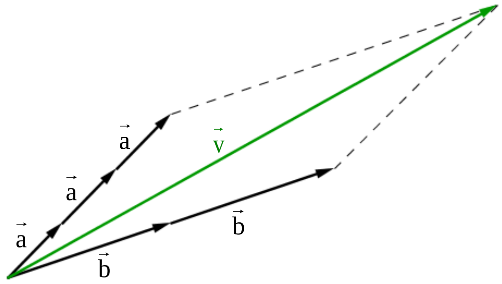
§ 4 Linearkombination von Vektoren

Definition: Ein Vektor $\vec{v}$ heißt Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ wenn gilt:
$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

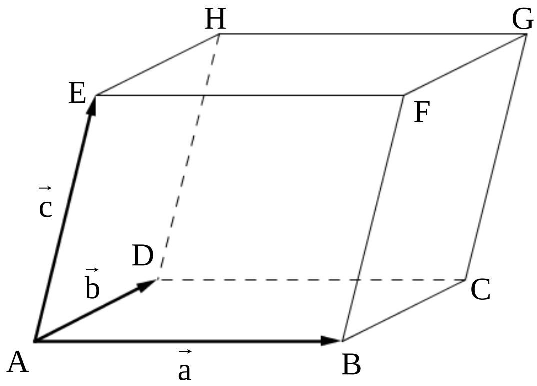
Beispiel:



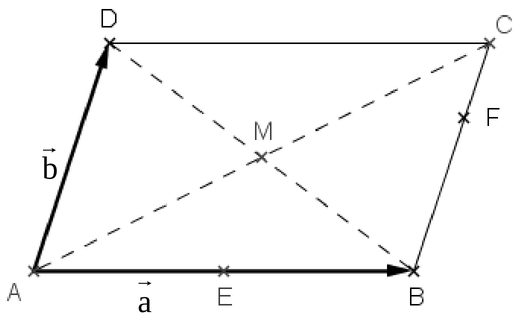
Für den Vektor $\vec{v}$ gilt: $\vec{v} = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$
Man sagt: Der Vektor $\vec{v}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

4.1 Bestimmung von Linearkombinationen mittels einer Vektorkette

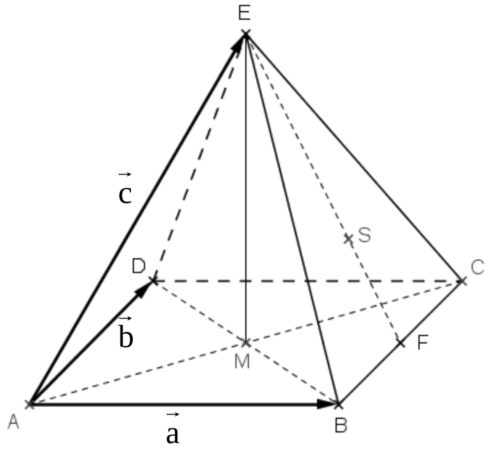
1. Gegeben ist ein Spat, der durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird. Schreiben Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BG}$ und $\overrightarrow{HB}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.



2. Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD, das durch die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. E halbiert die Strecke $[AB]$, F teilt die Strecke $[BC]$ im Verhältnis $2:1$ und M ist der Schnittpunkt der Diagonalen. Schreiben Sie die Vektoren $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EM}$ und $\overrightarrow{MF}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



3. Eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche wird durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt. M ist der Mittelpunkt des Rechtecks ABCD, S der Schwerpunkt des Dreiecks BCE.
   Schreiben Sie die Vektoren $\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{ES}$ und $\overrightarrow{DS}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.



4.2 Rechnerische Bestimmung von Linearkombinationen

4. Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar.

   Also: $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Dieser Ansatz liefert ein Gleichungssystem aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

   $$\begin{array}{l} 1 = \lambda + 2\mu \\ \underline{-3 = 4\lambda + \mu} \\ 7 = -7\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1 \end{array}$$

   also: $\vec{v} = -\vec{a} + \vec{b}$

5. Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 36 \\ 19 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar.

6. Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dar.

7. Stelle die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dar.

8. Stelle den Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

f) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\lambda-3\mu+2\gamma&=1\\-\lambda+\mu&=1\\\lambda+\mu-\gamma&=1\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem erhält man auch so:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-3&2\\-1&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}}_{\text{Matrix}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\gamma\end{pmatrix}}_{\text{Vektor}}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} \quad \text{bzw.} \quad \left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\gamma\end{pmatrix}=\vec{v} \qquad \begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

g) $\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ $\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\3\\2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}$

h) $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ $\quad\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\9\\3\end{pmatrix}$ $\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

9. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

   a) Untersuchen Sie, ob $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellbar ist.

   b) Zeigen Sie: $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\-5\\-1\end{pmatrix}$ ist als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellbar.

   Zeigen Sie, dass die Darstellung nicht eindeutig ist.

   c) Auf welche triviale Art ist der Nullvektor $\vec{0}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellbar? Untersuchen Sie, ob sich der Nullvektor $\vec{0}$ noch auf andere Arten als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen lässt.

10. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des Raumes. Prüfen Sie, ob
    a) $\vec{0}$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist.
    b) $\vec{a}$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist.
    c) $\vec{a}$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$ ist.
    d) $\vec{b}$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{a}-\vec{b}$ und $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ist.

11. Prüfen Sie, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ so gibt, dass der Vektor $\vec{v}$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ t-2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -t \\ 3 \end{pmatrix}$