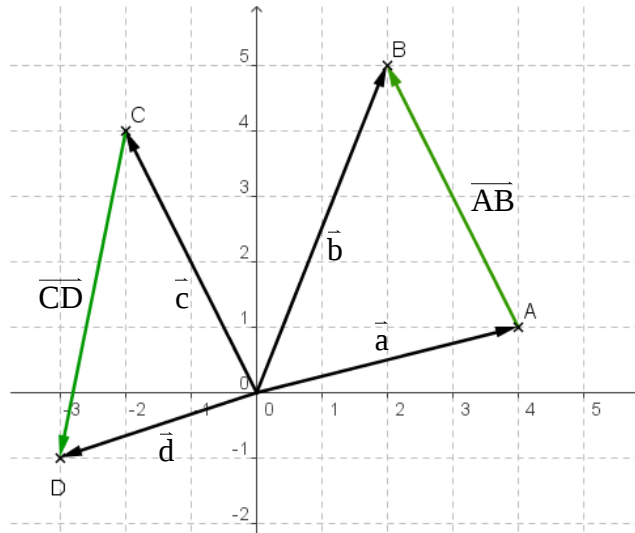


§ 3 Punkte, Ortsvektoren und Verbindungsvektoren

Zunächst im 2-dimensionalen:

Gegeben sind die Punkte $A(4|1)$, $B(2|5)$, $C(-2|4)$ und $D(-3|-1)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.



Zu jedem Punkt P im Koordinatensystem gibt es einen Pfeil, der im Ursprung beginnt und in P endet. Dieser Pfeil legt eindeutig einen Vektor $\overrightarrow{OP}$ fest, den wir den Ortsvektor des Punktes P nennen und kurz mit $\vec{p}$ bezeichnen. Die Vektorkoordinaten von $\vec{p}$ stimmen mit den Punktkoordinaten von P überein.

$$\text{Hier also: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Den Vektor, der im Punkt A beginnt und im Punkt B endet nennt man den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-(-2) \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Im 3-dimensionalen:

Gegeben sind die Punkte $A(3|2|-5)$, $B(1|1|1)$, $C(-5|-1|0)$ und $D(0|1|-4)$

$$\text{Ortsvektoren: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, ...

Vektorrechnung

Vektoren werden addiert bzw. subtrahiert, indem man zeilenweise addiert bzw. subtrahiert.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+5 \\ -1+2 \\ 6+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bei der Skalar-Multiplikation wird die Zahl (Skalar) mit jeder Zeile multipliziert.

$$2 \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Gegeben sind die Punkte $A(1|2|-3)$, $B(-3|2|0)$ und $C(0|-4|7)$.

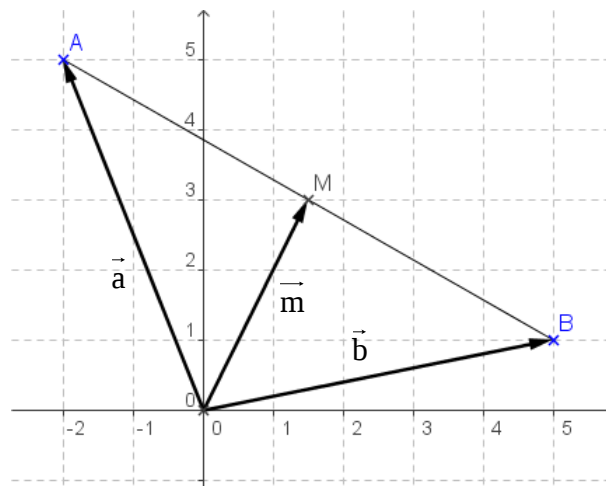
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ergibt.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M des Parallelogramms sowie die Koordinaten des Punktes L, der genau zwischen C und D liegt.

Besondere Ortsvektoren

- Mittelpunkt einer Strecke:

Gegeben sind die Punkte $A(-2|5)$ und $B(5|1)$. Ermitteln Sie den Mittelpunkt M der Strecke $[AB]$.



$$\text{Es gilt: } \vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{Also: } \vec{m} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

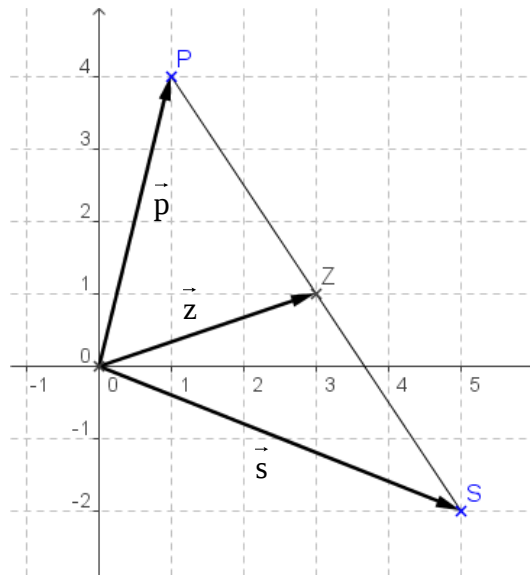
Der Punkt M hat somit die Koordinaten $M(1,5|3)$

Allgemein gilt für den Mittelpunkt der Strecke $[AB]$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

- **Spiegelpunkt:**

Gegeben sind die Punkte $P(1|4)$ und $Z(3|1)$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes S , den man durch spiegeln des Punktes P am Punkt Z erhält.



Es gilt: $\vec{s} = \vec{p} + \vec{PS} = \vec{p} + 2 \cdot \vec{PZ} = \vec{p} + 2 \cdot (\vec{z} - \vec{p}) = \vec{p} + 2 \cdot \vec{z} - 2 \cdot \vec{p} = 2 \cdot \vec{z} - \vec{p}$

Also: $\vec{s} = 2 \cdot \vec{z} - \vec{p} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Der Punkt S hat somit die Koordinaten $S(5|-2)$

Allgemein gilt für den Spiegelpunkt S des Punktes P bezüglich des Spiegelpunktes Z :

$$\vec{s} = 2 \cdot \vec{z} - \vec{p}$$

Einfacher kommt man auf dieses Ergebnis, wenn man so ansetzt, dass der Punkt Z als Mittelpunkt der Strecke $[PS]$ gesehen wird. Also:

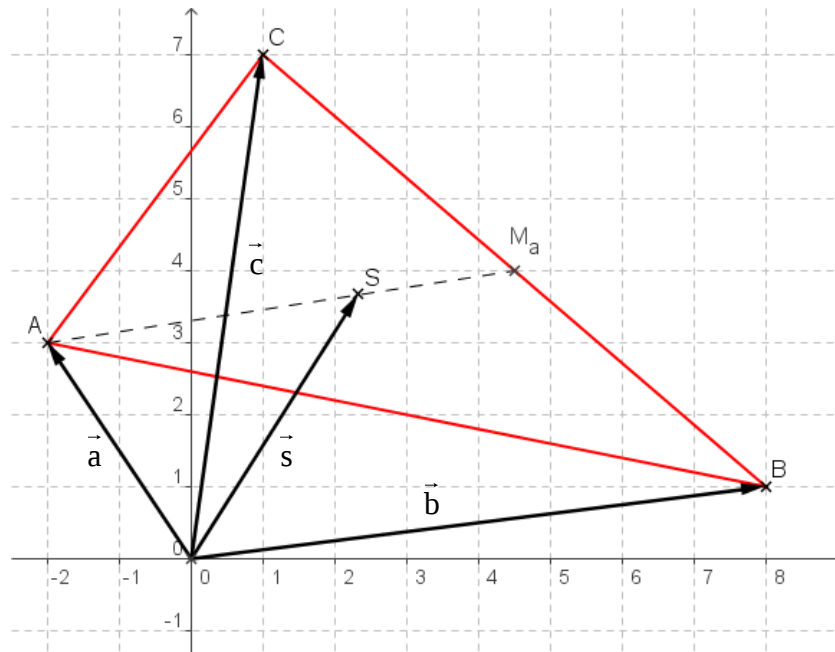
$$\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{s})$$

Löst man nun nach $\vec{s}$ auf, so erhält man ebenfalls:

$$\vec{s} = 2 \cdot \vec{z} - \vec{p}$$

- Schwerpunkt:**

Gegeben sind die Eckpunkte $A(-2|3)$, $B(8|1)$ und $C(1|7)$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks ABC .



Es gilt:

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{a} + \overrightarrow{AS} = \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM_a} = \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot (\vec{m_a} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \right) = \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} - \frac{2}{3} \vec{a} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

$$\text{Also: } \vec{s} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 3\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Der Punkt S hat somit die Koordinaten $S(2\frac{1}{3} | 3\frac{2}{3})$

Allgemein gilt für den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC :

$$\vec{s} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Aufgaben:

- Gegeben sind die vier Punkte $A(3|-1|-2)$, $B(-2|1|-3)$, $C(-1|5|0)$ und $D(9|1|2)$.

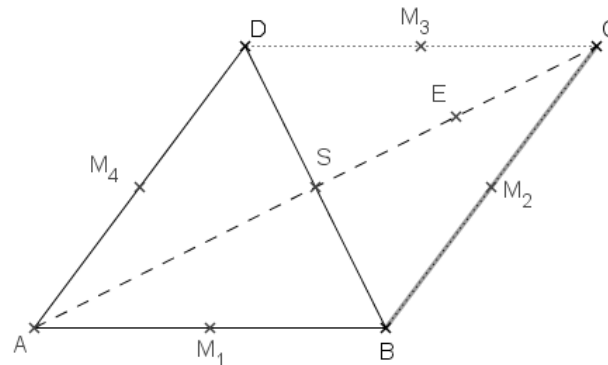
Untersuchen Sie die Strecken $[AB]$ und $[CD]$ auf Parallelität.

Bilden die vier Punkte ein Parallelogramm?

- Ein Dreieck besitzt die Eckpunkte $A(0|1|2)$, $B(-1|3|-5)$ und $C(-2|-1|4)$.

Berechnen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte M_a , M_b und M_c der Dreiecksseiten sowie die Koordinaten des Schwerpunktes S .

3. Gegeben sind die Punkte $A(1|4|0)$, $B(-2|6|-3)$ und $D(-5|-1|3)$.



- Bestimmen Sie den Punkt C so, dass ein Parallelogramm entsteht.
 - Berechnen Sie die Seitenmittelpunkte M_1 , M_2 , M_3 und M_4 und den Diagonalschnittpunkt S.
 - Der Punkt E halbiert die Strecke $[SC]$. Bestimmen Sie seine Koordinaten. Prüfen Sie, ob E der Mittelpunkt der Strecke $[M_2M_3]$ ist. Zeigen Sie, dass die Strecke $[BD]$ und die Strecke $[M_2M_3]$ parallel sind und geben Sie an, um welchen Faktor die Strecke $[BD]$ länger als die Strecke $[M_2M_3]$ ist.
4. Von einem Parallelogramm ABCD sind die Punkte $C(1|-1|2)$, $D(0|4|-3)$ und $S(-0,5|1|3)$ bekannt (siehe Abbildung zu Aufgabe 3.). Berechnen Sie die Koordinaten von A und B.
5. Gegeben sind die Punkte $A(8|1|2)$, $B(-1|2|1)$ und $C(-1|0|-3)$. Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Dreiecks ABC in der $x_1 - x_2$ -Ebene liegt.
6. Von einem Dreieck ABC sind die Eckpunkte $A(2,5|-0,5|1)$, $B(-1|4,5|-1)$ und der Schwerpunkt $S(-0,5|1|3)$ gegeben. Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes C.
7. Ein Dreieck hat die Eckpunkte $A(t|-2t|-2t)$, $B(-1|3+t|-4)$ und $C(-2|t|4)$, mit $t \in \mathbb{R}$.
- Prüfen Sie, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass der Punkt $M_1(1|1|1)$ oder $M_2(2|-1|-7)$ der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ ist.
 - Prüfen Sie, ob es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass der Punkt $S_1(-1|1|0)$ oder $S_2(-1|2|0)$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.