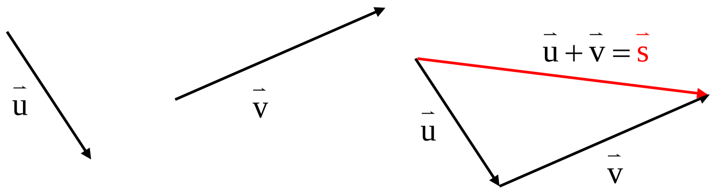
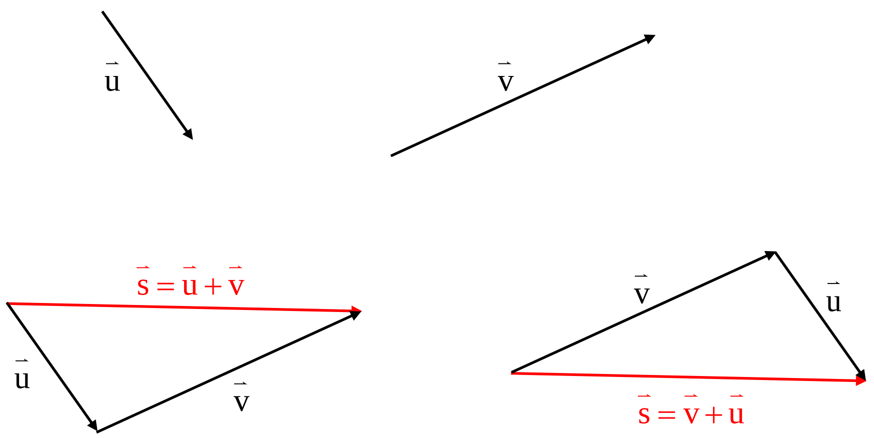
§ 2 Addition, Subtraktion und Skalar-Multiplikation von Vektoren

2.1 Addition von Vektoren

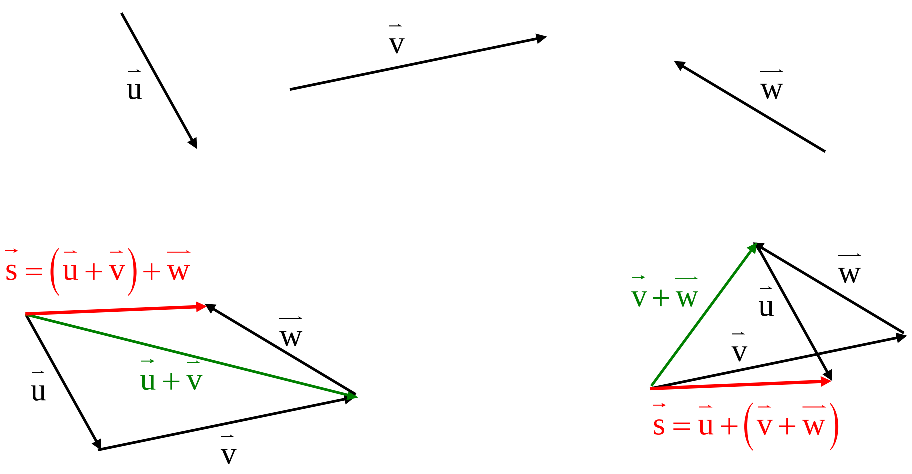
An die Spitze des Vektors des 1. Summanden wird der Fuß des Vektors des 2. Summanden angelegt. Der Summenvektor führt dann vom Fuß des ersten Vektors zur Spitze des 2. Vektors.



- Kommutativgesetz der Addition: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$



- Assoziativgesetz der Vektoraddition: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$



- Neutrales Element der Vektoraddition ist der Nullvektor $\vec{0}$:

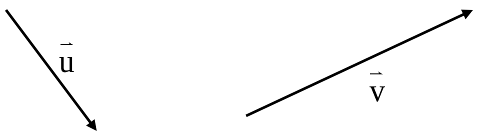
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}=\vec{0}+\vec{u}$$

- Inverses Element der Vektoraddition ist der Gegenvektor:

$$\text{Vektor:}\quad \vec{a}$$
$$\text{Gegenvektor:}\quad -\vec{a}$$

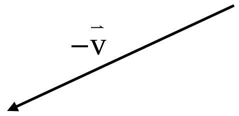
2.2 Subtraktion von Vektoren

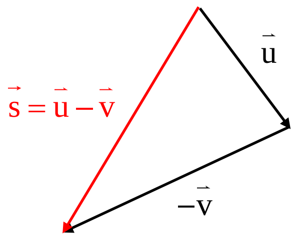
Die Subtraktion wird auf die Addition eines Gegenvektors zurückgeführt.



Es gilt: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$

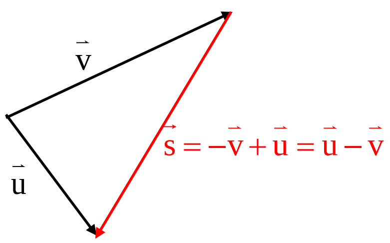
Also benötigt man den Gegenvektor:

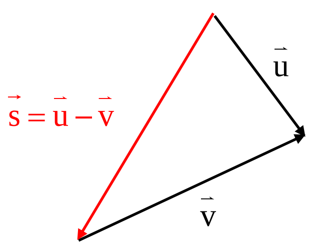




Oder auch:

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)=-\vec{v}+\vec{u}$$





Übung 1: In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte
$A(1|1)$, $B(2|4)$, $C(5|4)$, $D(8|2)$, $E(6|-1)$ und $F(4|-3)$ gegeben.

Für den Vektor von A nach B gilt: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
Für den Vektor von C nach D gilt: $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$
Für den Vektor von E nach F gilt: $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$

Zeigen Sie mit diesen Vektoren, dass gilt:

- $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{w} + \vec{v})$

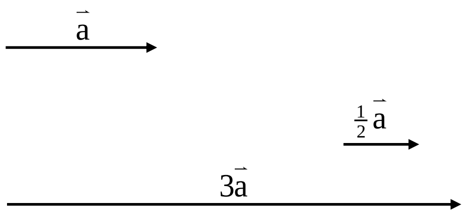
Zeichnen Sie den Vektor

- $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$
- $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$
- $-\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{u} + \vec{v}$

2.3 Skalar-Multiplikation

Es gilt: $\underbrace{\vec{a} + \vec{a} + ... + \vec{a}}_{n-\text{mal}} = n \cdot \vec{a}$

Der Vektor $n \cdot \vec{a}$ ist n-mal so lang wie der Vektor $\vec{a}$ und hat dieselbe Richtung.

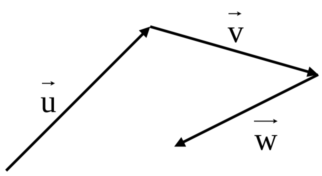


- Assoziativgesetz der Skalar-Multiplikation: $r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}$
- 1. Distributivgesetz der Skalar-Multiplikation: $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$
- 2. Distributivgesetz der Skalar-Muliplikation: $(r + s) \cdot \vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$

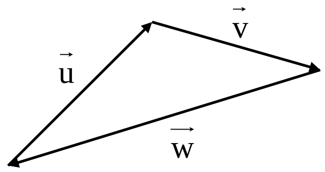
2.4 Vektorketten

Addiert man Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ..., dann nennt man diese Aneinanderreihung $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + ...)$ auch eine Vektorkette.

Sind der Fuß des ersten Vektors und die Spitze des letzten Vektors verschieden, so heißt die <u>Vektorkette offen</u>.



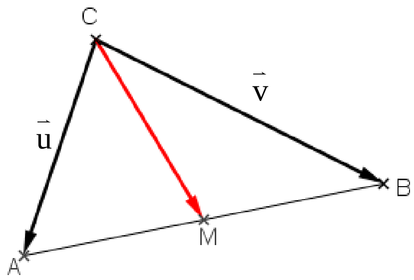
Sind der Fuß des ersten Vektors und die Spitze des letzten Vektors gleich, so heißt die <u>Vektorkette geschlossen</u>.



Bei geschlossenen Vektorketten gilt stets: $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$ (Bilden also einen Nullvektor!)

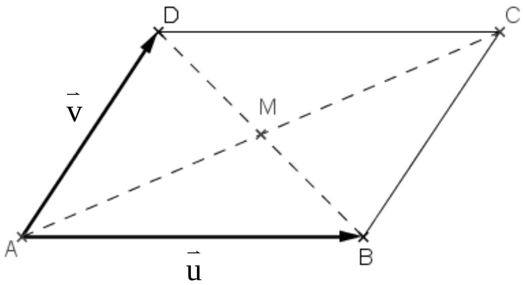
<u>Übungen zum Rechnen mit Vektoren</u>

1. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC. Die Seiten $[CA]$ und $[CB]$ des Dreiecks legen die beiden Vektoren $\vec{u}=\overrightarrow{CA}$ und $\vec{v}=\overrightarrow{CB}$ fest. Man sagt auch: „Die Vektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ spannen das Dreieck ABC auf.“
   M ist die Mitte von $[AB]$. Drücke den Seitenhalbierenden Vektor $\overrightarrow{CM}$ durch die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus.

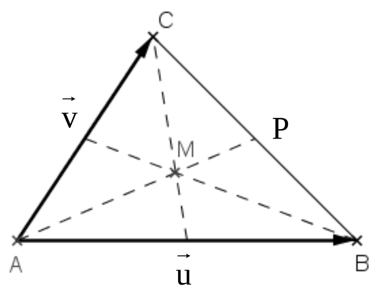


(Aufgaben von diesem Typ löst man so: „Statt von C nach M direkt gehe von C nach M auf einem Umweg.“ Der Umweg soll sich dabei aus Vektoren zusammensetzen, die den Körper aufspannen.)

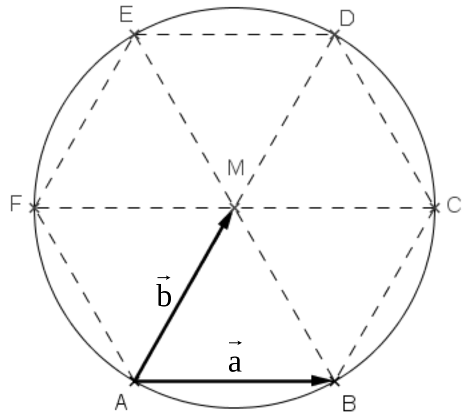
2. Das Parallelogramm ABCD wird durch die Vektoren $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ und $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ aufgespannt. Drücken Sie den Vektor $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM}$ und $\overrightarrow{MC}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus.



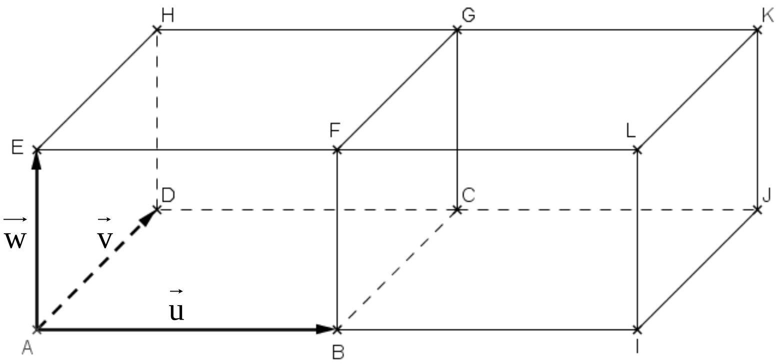
3. Das Dreieck ABC wird durch die Vektoren $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ und $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ aufgespannt. M ist der Schwerpunkt des Dreiecks. Drücken Sie den Vektor $\overrightarrow{AM}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus.
   (Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in dessen Schwerpunkt. Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1)



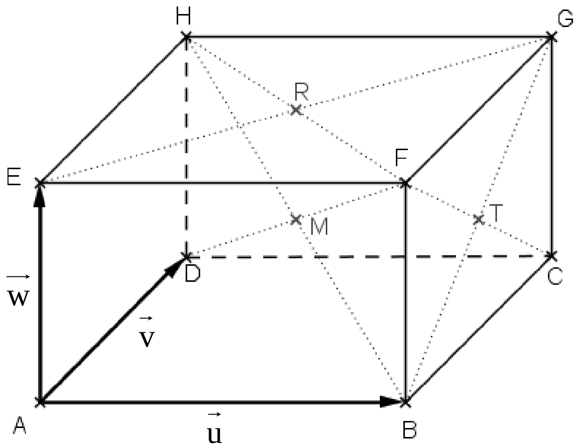
4. Ein regelmäßiges Sechseck ABCDEF mit dem Umkreismittelpunkt M wird von den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AM}$ aufgespannt.
Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{DF}$ und $\overrightarrow{BF}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.



5. Der Quader ABCDEFGH wird durch die Vektoren $\vec{u} = \overline{AB}$, $\vec{v} = \overline{AD}$ und $\vec{w} = \overline{AE}$ aufgespannt. Der Quader BIJCFLKG ist kongruent zum ersten Quader.
Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{HF}$ und $\overrightarrow{HI}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus.



6. Der Quader ABCDEFGH wird durch die Vektoren $\vec{u} = \overline{AB}$, $\vec{v} = \overline{AD}$ und $\vec{w} = \overline{AE}$ aufgespannt.
Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{RT}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus.



7. Die Pyramide ABCS wird durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{SC}$ aufgespannt. Der Mittelpunkt der Strecke $[BC]$ wird mit T bezeichnet, der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist M und R ist der Mittelpunkt der Strecke $[SM]$. Bestimme $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{TR}$