2011 S I Lösung

1.0 Die Eisdiele BAVARIA bietet unterschiedliche Eisbecher an. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Eigentümer, dass 60% der Gäste einen Eisbecher mit Fruchteis (F) bestellen. Zudem ist bekannt, dass 70% aller Eisbecher mit Sahne (S) bestellt werden. 10% der Eisbecher werden ohne Fruchteis und ohne Sahne bestellt.

1.1 Untersuchen Sie mit Hilfe einer Vierfeldertafel, ob die Ereignisse F uns S stochastisch unabhängig sind. (5 BE)

	F	$\overline{F}$	$\sum$
S	0,4	0,3	0,7
$\overline{S}$	0,2	0,1	0,3
$\sum$	0,6	0,4	1

$$\left.\begin{array}{l} P(F)\cdot P(S)=0,6\cdot 07=0,42 \\ P(F\cap S)=0,4 \end{array}\right\} \Rightarrow P(F)\cdot P(S)\neq P(F\cap S)$$

Somit sind die Ereignisse F und S stochastisch abhängig.

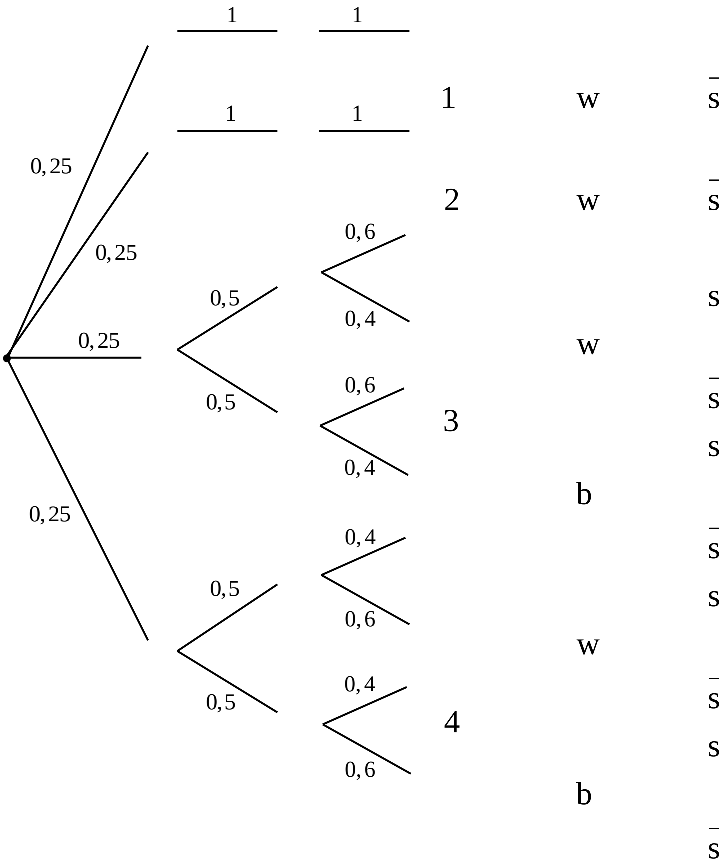
1.2 Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{\overline{F}\cup S}$ möglichst einfach mit Worten und geben Sie seine Wahrscheinlichkeit an. (3 BE)

$\overline{\overline{F}\cup S}=F\cap\overline{S}$: „Ein Gast bestellt Fruchteis ohne Sahne.“

$P\left(\overline{\overline{F}\cup S}\right)=P\left(F\cap\overline{S}\right)=0,2$

2.0 Die Eisdiele BAVARIA unterhält im Sommer einen Eisstand an einem Badesee. Jeweils 25% der Kunden kaufen dort 1, 2, 3 oder 4 Kugeln Eis (es werden maximal 4 Kugeln pro Bestellung verkauft!)
Die Kugeln werden normalerweise in der Waffel (w) ausgegeben. Beim Kauf von 3 oder 4 Kugeln kann der Kunde auch einen Becher (b) wählen, was jeweils jeder zweite dieser Kunden wünscht. Außerdem können Käufer von 3 oder 4 Kugeln das Eis mit Sahne (s) oder ohne Sahne bestellen.
Unabhängig davon, ob das Eis im Becher oder in der Waffel verkauft wird, wählen 60% der Kunden, die 3 Kugeln bestellen, auch Sahne, bei den Kunden mit 4 Kugeln sind dies nur 40%.
Das Zufallsexperiment besteht in der Feststellung, wie viele Kugeln Eis ein beliebig ausgewählter Kunde kauft, ob das Eis in der Waffel oder im Becher ausgegeben wird und ob Sahne gewünscht wird.

2.1 Ermitteln Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms alle 10 Elementarereignisse mit ihren Wahrscheinlichkeiten. (6 BE)



ω_i	$P(\omega_i)$	E_1	E_2	E_3	$E_4 = E_1 \cap E_2$
$1w\overline{s}$	$0,25$		x		
$2w\overline{s}$	$0,25$	x	x		x
$3ws$	$0,075$	x			
$3w\overline{s}$	$0,05$	x	x		x
$3bs$	$0,075$	x			
$3b\overline{s}$	$0,05$	x	x	x	x
$4ws$	$0,05$	x			
$4w\overline{s}$	$0,075$	x	x		x
$4bs$	$0,05$	x			
$4b\overline{s}$	$0,075$	x	x	x	x

2.2 Gegeben seien folgende Ereignisse:

E_1: „Ein Kunde bestellt mehr als eine Kugel Eis.“

E_2: „Ein Kunde erhält keine Sahne.“

E_3: „Ein Kunde erhält das Eis im Becher, aber ohne Sahne.“

Geben Sie die Ereignisse E_3 und $E_4 = E_1 \cap E_2$ in aufzählender Mengenschreibweise an und bestimmen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten. (4 BE)

$E_3 = \{3b\overline{s};\ 4b\overline{s}\}$

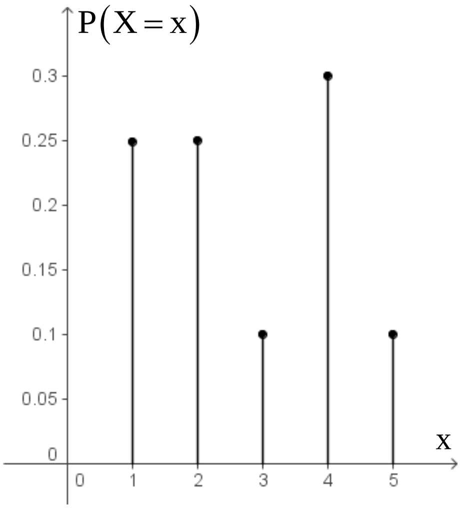
$P(E_3) = 0,05 + 0,075 = 0,125$

$E_4 = \{2w\overline{s};\ 3w\overline{s};\ 3b\overline{s};\ 4w\overline{s};\ 4b\overline{s}\}$

$P(E_4) = 0,25 + 0,05 + 0,05 + 0,075 + 0,075 = 0,5$

2.3 Eine Kugel Eis und eine Portion Sahne kosten jeweils 1,00€.
Die Zufallsgröße X gibt den Preis einer Bestellung an.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und stellen Sie sie geeignet graphisch dar. (5 BE)

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,25	0,25	0,1	0,3	0,1



Berechnen Sie bei den folgenden Aufgaben die Wahrscheinlichkeiten auf vier Nachkommastellen.

3.0 Bei einem Wandertag kommt eine Klasse mit 25 Schülerinnen und Schülern an einem Eisstand vorbei. Der Lehrer kauft jedem Schüler eine Kugel Eis. Erfahrungsgemäß sind 40% aller verkauften Kugeln Schokoladeneiskugeln.

3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Schokoladeneiskugeln, die der Lehrer für seine Klasse bezahlt, innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. (5 BE)

Man geht hier von einer Binomialverteilung aus. Somit gilt für den Erwartungswert:

$$\mu = E(X) = n \cdot p = 25 \cdot 0,4 = 10$$

Und für die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{25 \cdot 0,4 \cdot (1-0,4)} \approx 2,45$$

Für die zu berechnende Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$\begin{aligned} P_{0,4}^{25}\left(|X-\mu| < \sigma\right) &= P_{0,4}^{25}\left(\mu-\sigma < X < \mu-\sigma\right) \\ &= P_{0,4}^{25}\left(10-2,45 < X < 10+2,45\right) \\ &= P_{0,4}^{25}\left(7,55 < X < 12,45\right) \\ &= P_{0,4}^{25}\left(X \le 12\right) - P_{0,4}^{25}\left(X \le 7\right) \\ &= 0,84623 - 0,15355 \approx 0,6927 \end{aligned}$$

3.2 Nachdem die ersten 14 Schüler ihr Eis erhalten haben, merkt der Eisverkäufer, dass das Schokoladeneis nur noch für zwei Kugeln reicht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle weiteren Bestellungen erfüllt werden können, wenn von den restlichen Eissorten noch genügend vorhanden ist. (3 BE)

Es verbleiben also noch 11 Schüler. Damit das Eis reicht dürfen höchstens zwei Schüler je eine Kugel Schokoeis bestellen. Somit gilt:

$$P_{0,4}^{11}(X=0)+P_{0,4}^{11}(X=1)+P_{0,4}^{11}(X=2)=\binom{11}{0}\cdot 0,4^0\cdot 0,6^{11}+\binom{11}{1}\cdot 0,4^1\cdot 0,6^{10}+\binom{11}{2}\cdot 0,4^2\cdot 0,6^9$$
$$=0,6^{11}+11\cdot 0,4\cdot 0,6^{10}+55\cdot 0,4^2\cdot 0,6^9\approx 0,1189$$

3.3.0 Der Eisverkäufer vermutet, dass der Anteil der verkauften Schoko-Eiskugeln höher als sonst liegt (Gegenhypothese) und will diese Vermutung anhand von 200 Bestellungen von jeweils einer Kugel Eis überprüfen.

3.3.1 Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 10%-Niveau. (6 BE)

Testgröße X: Anzahl der Schokoladeneiskugeln $(n=200)$

Nullhypothese: $p=0,4$ $A=\{0;1;2;...;k\}$

Gegenhypothese: $p>0,4$ $\overline{A}=\{k+1;...;200\}$ rechtsseit. Signifikanztest

Signifikanzniveau: $\alpha=0,1$

Ablehnungsbereich: $P_{0,4}^{200}(X\geq k+1)<0,1$

$1-P_{0,4}^{200}(X\leq k)<0,1$

$P_{0,4}^{200}(X\leq k)>0,9 \quad\Rightarrow\quad k=89$

Annahmebereich: $A=\{0;1;...;89\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A}=\{90;...;200\}$

3.3.2 Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht. Wie muss sich der minimale Annahmebereich von H_0 verändern, wenn das Signifikanzniveau abgesenkt wird? (3 BE)

Der Fehler 2. Art besteht darin, dass man annimmt, dass der Anteil der Schokoladeneiskugeln (bei Schülern am Wandertag) 40% beträgt, in Wirklichkeit aber gestiegen ist.
Um das Signifikanzniveau abzusenken, muss sich der minimale Annahmebereich vergrößern.