

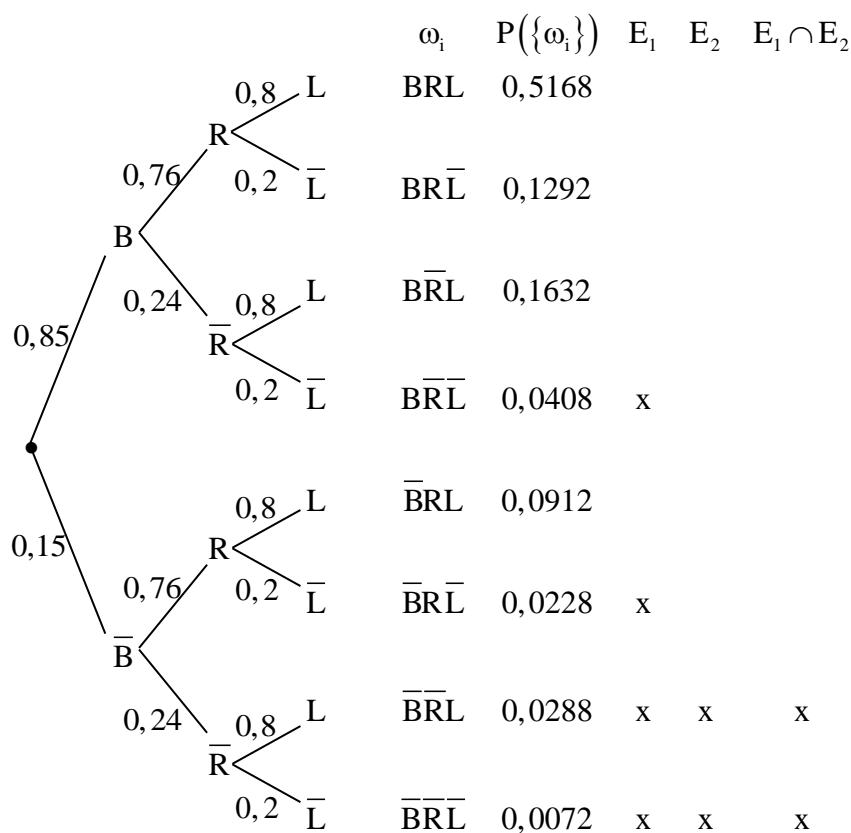
2010 S II Lösung

Im folgenden werden auftretende relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0 Bei einer groß angelegten Verkehrskontrolle der Polizei wurden insgesamt 500 LKW auf Mängel überprüft. Es stellte sich heraus, dass bei 85% der LKW die Bremsen in Ordnung waren (B), bei 120 LKW die Reifen zu wenig Profiltiefe aufwiesen (\bar{R}) und bei 80% der LKW die Lichtanlage nicht zu beanstanden war (L).

Die Untersuchung eines zufällig herausgegriffenen LKW auf die Mängelarten wird als Zufallsexperiment aufgefasst, wobei die Mängel voneinander unabhängig auftreten.

- 1.1 Ermitteln Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. (5 BE)



1.2.0 Gegeben sind folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein zufällig ausgewählter LKW hat mindestens 2 Mängel.“

E_2 : „Bei einem zufällig ausgewählten LKW sind die Bremsen defekt und die Reifen weisen nicht die entsprechende Profiltiefe auf.“

- 1.2.1 Stellen Sie die Ereignisse E_1 und E_2 in aufzählender Mengenschreibweise dar und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten. (4 BE)

$$E_1 = \{\overline{BRL}; \overline{BRL}; \overline{BRL}; \overline{BRL}\}$$

$$P(E_1) = 0,0408 + 0,0228 + 0,0288 + 0,0072 = 0,0996$$

$$E_2 = \{\overline{BRL}; \overline{BRL}\}$$

$$P(E_2) = 0,0288 + 0,0072 = 0,036$$

- 1.2.2 Untersuchen Sie die Ereignisse E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit. (3 BE)

$$\left. \begin{array}{l} P(E_1) \cdot P(E_2) = 0,0996 \cdot 0,036 = 0,0035856 \\ P(E_1 \cap E_2) = 0,036 \end{array} \right\} \Rightarrow P(E_1) \cdot P(E_2) \neq P(E_1 \cap E_2)$$

Somit sind die Ereignisse E_1 und E_2 stochastisch abhängig.

- 1.3 Erfahrungsgemäß sind bei 25% der kontrollierten LKW die Papiere nicht in Ordnung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 zufällig überprüften LKW die Anzahl der LKW-Fahrer, deren Papiere in Ordnung sind, innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. (4 BE)

$$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,75 = 75$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = \sqrt{18,75} \approx 4,33$$

$$P(|x - \mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = P(75 - 4,33 < x < 75 + 4,33) =$$

$$= P(70,67 < x < 79,33) = P_{0,75}^{100}(X \leq 79) - P_{0,75}^{100}(X \leq 70) = 0,85117 - 0,14954 = 0,70163$$

- 2.0 Auf Grund von Kontrollen weiß man, dass bei 81,45% der mit genau 4 Personen besetzten PKW alle Insassen angeschnallt sind. Die Wahrscheinlichkeit für das Anlegen des Gurtes ist auf jedem Sitzplatz gleich. Ein mit 4 Personen besetzter PKW wird kontrolliert.

- 2.1 Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffener Insasse angeschnallt ist, ziemlich genau 0,95 beträgt. (2 BE)

$$\text{Es gilt: } p^4 = 0,8145 \Rightarrow p = \sqrt[4]{0,8145} \approx 0,95$$

- 2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse auf vier Nachkommastellen gerundet:

E_3 : „die beiden Personen auf den Vordersitzen sind angeschnallt, diejenigen auf den Rücksitzen nicht.“

E_4 : „Genau zwei Personen in einem PKW sind angeschnallt.“ (4 BE)

$$P(E_3) = 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,05 \cdot 0,05 = 0,00225625 \approx 0,00226$$

$$P(E_4) = P_{0,95}^4(X = 2) = 0,01354$$

- 2.3 In einer späteren Kontrolle soll untersucht werden, ob sich der Anteil der angeschnallten Personen erhöht hat (Gegenhypothese). Dazu wird ein Test mit 50 zufällig ausgewählten PKW, die jeweils mit genau vier Personen besetzt sind, durchgeführt. Geben Sie die Testgröße, sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn 97% der kontrollierten Personen angeschnallt sind? (7 BE)

Testgröße X: Anzahl der angeschnallten Personen ($n = 200$)

Nullhypothese H_0 : $p = 0,95$ $A = \{0; 1; 2; \dots; k\}$

Gegenhypothese H_1 : $p > 0,95$ $\bar{A} = \{k + 1; \dots; 200\}$ rechtsseit. Signifikanztest

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Ablehnungsbereich: $P_{0,95}^{200}(X \geq k + 1) < 0,05$
 $1 - P_{0,95}^{200}(X \leq k) < 0,05$
 $P_{0,95}^{200}(X \leq k) > 0,95 \Rightarrow k = 195$

Annahmehbereich: $A = \{0; 1; \dots; 195\}$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{196; \dots; 200\}$

Sind 97% der Personen, also $0,97 \cdot 200 = 194$ Personen angeschnallte so entscheidet man sich für die Nullhypothese H_0 .

- 3.0 Für einen Autohersteller soll untersucht werden, ob weibliche Autofahrer Cabrios eher bevorzugen als männliche. Dazu wird eine Stichprobe von 200 PKW betrachtet. 60 Fahrerinnen (W) wurden gezählt, davon 3 ein einem Cabrio (C). Insgesamt gab es 10 Cabrios in der Stichprobe. Ein beliebiger PKW aus den 200 wird herausgegriffen.
- 3.1 Beschreiben Sie die Ereignisse

$$E_5 = \bar{W} \cup \bar{C}$$

$$E_6 = \overline{W \cup C}$$

möglichst einfach mit Worten.

(3 BE)

E_5 : „Ein PKW wird von einem Mann gesteuert oder ist kein Cabrio.“

Da gilt: $E_6 = \overline{W \cup C} = \bar{W} \cap \bar{C} = \bar{W} \cap C$

E_6 : „Ein Cabrio wird von einem Mann gesteuert.“

- 3.2 Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vierfeldertafel $P(E_5)$ und $P(E_6)$. (5 BE)

	W	\bar{W}	Σ
C	$\frac{3}{200}$	$\frac{7}{200}$	$\frac{10}{200}$
\bar{C}	$\frac{57}{200}$	$\frac{133}{200}$	$\frac{190}{200}$
Σ	$\frac{60}{200}$	$\frac{140}{200}$	1

$$P(E_5) = P(\bar{W} \cup \bar{C}) = \frac{7}{200} + \frac{133}{200} + \frac{57}{200} = \frac{197}{200}$$

$$P(E_6) = P(\overline{W \cup \bar{C}}) = P(\bar{W} \cap C) = \frac{7}{200}$$

- 3.3 Kann aus der Untersuchung gefolgert werden, dass Frauen häufiger Cabrios bevorzugen als Männer? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 BE)

Von 60 Frauen fahren 3 ein Cabrio, das entspricht einem Anteil von $\frac{3}{60} = 0,05$.

Von 140 Männern fahren 7 ein Cabrio, das entspricht einem Anteil von $\frac{7}{140} = 0,05$.

Da beide Wahrscheinlichkeiten gleich sind, kann nicht gefolgert werden, dass Frauen häufiger Cabrios bevorzugen als Männer. (Das Fahren eines Cabrios ist somit unabhängig vom Geschlecht.)