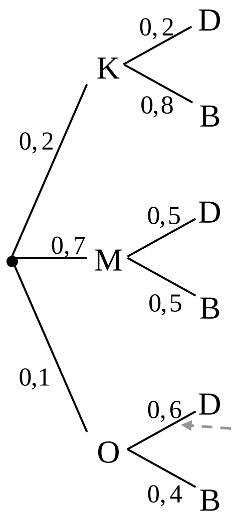
2009 S I

1.0 Für eine statistische Untersuchung wurden in der KFZ-Zulassungsstelle einer großen Stadt in einem bestimmten Zeitraum Aufzeichnungen über die Anzahl der Neuzulassungen von PKW mit Diesel (D)- bzw. Benzin (B)-Motor geführt. Weiterhin wurden drei Fahrzeugklassen erfasst: Kleinwagen (K), Mittelklassewagen (M) und Oberklassewagen (O). Von den Kleinwagen hatten 20% und von der Mittelklasse 50% einen Dieselmotor. Von den insgesamt 80000 erfassten PKW in dieser Untersuchung waren 45% mit einem Dieselmotor ausgerüstet, 16000 waren Kleinwagen und 8000 PKW der Oberklasse.
Die Bestimmung der Fahrzeugklasse sowie der Motorart eines zufällig herausgegriffenen PKWs dieser Untersuchung wird als Zufallsexperiment ausgefasst. Die relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.1 Bestimmen Sie z.B. mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller sechs Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments.
$\left[\text{Teilergebnis}: P(\{OD\}) = 0,06\right]$ (6 BE)



ω_i	$P(\{\omega_i\})$	E_1	E_2	$E_1 \cap E_2$
KD	$0,04$	x	x	x
KB	$0,16$	x		
MD	$0,35$		x	
MB	$0,35$			
OD	$0,06$	x	x	x
OB	$0,04$	x		

Da die 45% der Fahrzeuge Dieselfahrzeug sind, gilt:
$$P(\{KD\}) + P(\{MD\}) + P(\{OD\}) = 0,2 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot p = 0,45 \quad \Rightarrow \quad p = 0,6$$

1.2 Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:
E_1: „Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug ist kein Mittelklassewagen."
E_2: „Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug besitzt einen Dieselmotor."
Geben Sie beide Ereignisse in der aufzählenden Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit. (4 BE)

$$E_1 = \{KD; KB; OD; OB\}$$
$$E_1 = \{KD; MD; OD\}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(E_1)\cdot P(E_2)=0,3\cdot 0,45=0,135 \\ P(E_1\cap E_2)=0,1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(E_1)\cdot P(E_2)\neq P(E_1\cap E_2)$$

Somit sind die Ereignisse E_1 und E_2 stochastisch abhängig.

2.0 An einer Tankstelle werden die Fahrzeuge in der Reihenfolge ihres Eintreffens bezüglich der Motorart registriert. Untersuchungen zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Dieselfahrzeugs 0,45 und für das Eintreffen eines Benzinfahrzeugs 0,55 beträgt.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse auf vier Nachkommastellen:

E_3: „Von 12 Fahrzeugen sind genau die ersten 6 Dieselfahrzeuge."

E_4: „Unter 12 Fahrzeugen sind genau 5 Benzinfahrzeuge." (3 BE)

$$P(E_3)=0,45^6\cdot 0,55^6\approx 0,0002$$

$$P(E_4)=P_{0,55}^{12}(X=5)=\binom{12}{5}\cdot 0,55^5\cdot 0,45^7\approx 0,149$$

2.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 20 Fahrzeugen mehr als 5 aber weniger als 15 Dieselfahrzeuge befinden. (3 BE)

$$P_{0,45}^{20}(5<X<15)=P_{0,45}^{20}(X\leq 14)-P_{0,45}^{20}(X\leq 5)=0,99357-0,05533=0,93824$$

2.3 Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Dieselfahrzeugs an der Tankstelle sei nun p. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 2 nacheinander eintreffenden Fahrzeugen genau eines einen Dieselmotor besitzt, beträgt 0,18.
Berechnen Sie p (2 Lösungen!). (4 BE)

$$P_p^2(X=1)=0,18$$

$$\binom{2}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^1=0,18$$

$$2\cdot\left(p-p^2\right)=0,18$$

$$-p^2+p=0,09$$

$$-p^2+p-0,09=0$$

$$p_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-0,36}}{-2}=\frac{-1\pm 0,8}{-2}=\begin{cases}0,1\\0,9\end{cases}$$

3.0 In einer Zulassungsstelle werden Fahrzeuge in fünf Leistungsklassen erfasst. Die Zufallsgröße X gibt die Leistungsklasse eines zufällig ausgewählten Fahrzeugs an. Mit den Parametern a, b $\in$ R ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	a	b	0,18	0,13	0,14

3.1 Berechnen Sie a und b für den Fall, dass für den Erwartungswert E(X) gilt:
$E(X)=2,48$ (4 BE)

$\left[\text{Teilergebnis}: a=0,38\right]$

Für die Summe der Wahrscheinlichkeiten gilt:
$a+b+0{,}18+0{,}13+0{,}14=1 \quad \Rightarrow \quad a+b=0{,}55$

Und für den Erwartungswert gilt:
$1\cdot a+2\cdot b+3\cdot 0{,}18+4\cdot 0{,}13+5\cdot 0{,}14=2{,}48 \quad \Rightarrow \quad a+2b=0{,}72$

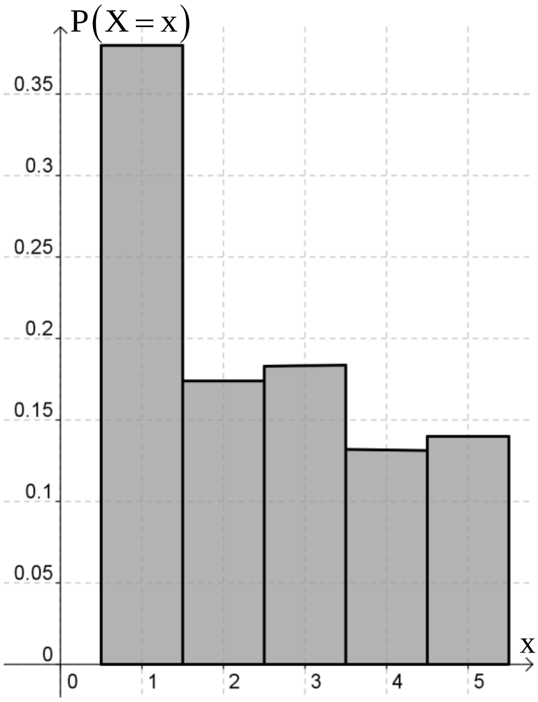
Somit hat man ein Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} a+b&=0{,}55 \\ a+2b&=0{,}72 \quad | - \\ \hline b&=0{,}17 \end{aligned}$$

$a+0{,}17=0{,}55 \quad \Rightarrow \quad a=0{,}38$

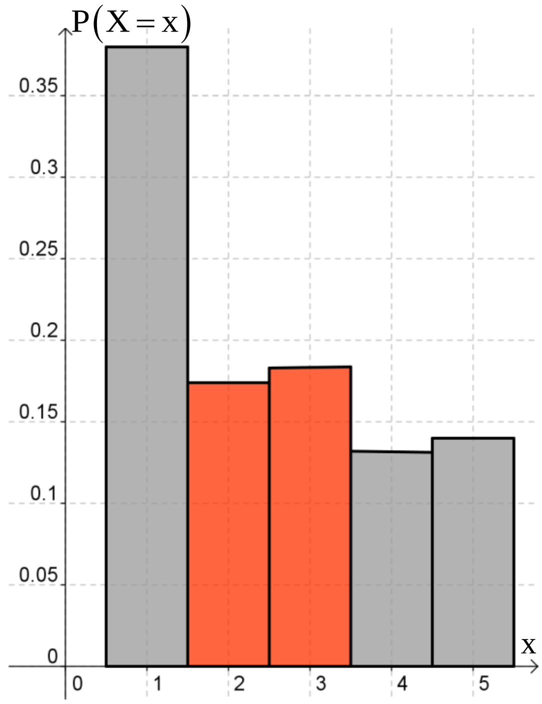
3.2 Zeichnen Sie ein Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung. (2 BE)

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,38	0,17	0,18	0,13	0,14



3.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.
Schraffieren Sie die zu dieser Wahrscheinlichkeit gehörende Fläche im Histogramm von Teilaufgabe 3.2. (6 BE)

$$\mathrm{Var}(X) = (1-2,48)^2 \cdot 0,38 + (2-2,48)^2 \cdot 0,17 + (3-2,48)^2 \cdot 0,18$$
$$+ (4-2,48)^2 \cdot 0,13 + (5-2,48)^2 \cdot 0,14 = 2,1096$$
$$\sigma = \sqrt{2,1096} \approx 1,452$$
$$P(|X-\mu| < \sigma) = P(\mu-\sigma < X < \mu-\sigma) = P(2,48-1,45 < X < 2,48+1,45)$$
$$= P(1,03 < X < 3,93) = P_{0,2}^{12}(X=2) + P_{0,2}^{12}(X=3) = 0,17 + 0,18 = 0,35$$



4.0 Jemand vermutet, dass sich der Anteil der silberfarbigen PKW von bisher 50% inzwischen modebedingt erhöht hat (Gegenhypothese). Er möchte dies an Hand von 50 vorbeifahrenden Autos testen.

4.1 Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Berechnen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn 30 silberfarbige PKW gezählt werden? (6 BE)

Testgröße X: Anzahl der silberfarbigen PKW $(n = 50)$

Nullhypothese: $p = 0,5$ $\quad A = \{0; 1; 2; \ldots; k\}$

Gegenhypothese: $p > 0,5$ $\quad \overline{A} = \{k+1; \ldots; 200\}$ rechtsseit. Signifikanztest

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Ablehnungsbereich: $P_{0,5}^{50}(X \geq k+1) < 0,05$

$$1 - P_{0,5}^{50}(X \leq k) < 0,05$$
$$P_{0,5}^{50}(X \leq k) > 0,95 \quad \Rightarrow \quad k = 31$$

Annahmebereich: $A = \{0; 1; ...; 31\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{32; 33 : ...; 50\}$

Werden 30 silberfarbige PKW gezählt, so geht man nach wie vor davon aus, dass sich der Anteil nicht verändert hat; es sind also 50% der PKW silber!

4.2 Erklären Sie kurz, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht. (2 BE)

Der Anteil der silberfarbigen PKW hat sich erhöht, wird aber aufgrund des Testergebnisses nicht erkannt.