2009 SII

Beim Glücksspiel „**Roulette**" verwendet man eine drehbare Scheibe mit 36 abwechselnd roten und schwarzen Nummernfächern sowie einem 37. (grünen) Fach für die Null. Die Gewinnzahl wird mit Hilfe einer Kugel ermittelt, die nach Drehung der Scheibe in einem Nummernfach liegen bleibt, wobei alle 37 Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen werden können.
Im Folgenden verstehen wir unter der Farbe einer Zahl die Farbe des zugehörigen Nummernfaches, es gibt also 1 grüne Zahl sowie 18 schwarze und 18 rote Zahlen.

1 Berechnen Sie auf 4 Nachkommastellen gerundet die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei siebenmaligem Werfen der Kugel
a) genau 5 mal eine rote Zahl erscheint.
b) höchstens 5 mal eine rote Zahl erscheint.
c) genau beim ersten, dritten und fünften Wurf eine rote Zahl erscheint. (7 BE)

a) $P^{7}_{\frac{18}{37}}(X=5)=\binom{7}{5}\cdot\left(\frac{18}{37}\right)^5\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^2\approx 0{,}151$

b) $P^{7}_{\frac{18}{37}}(X\le 5)=1-\left[P^{7}_{\frac{18}{37}}(X=6)+P^{7}_{\frac{18}{37}}(X=7)\right]=$

$=1-\left[\binom{7}{6}\cdot\left(\frac{18}{37}\right)^6\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^1+\binom{7}{7}\cdot\left(\frac{18}{37}\right)^7\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^0\right]=$

$=1-\left[0{,}04765+0{,}00645\right]=0{,}9459$

c) $P(\text{"genau beim ersten, dritten und fünften Wurf erscheint rot"})=$

$$=\underbrace{\frac{18}{37}}_{\substack{\text{1. Wurf}\\ \text{ist rot}}}\cdot\frac{19}{37}\cdot\underbrace{\frac{18}{37}}_{\substack{\text{3. Wurf}\\ \text{ist rot}}}\cdot\frac{19}{37}\cdot\underbrace{\frac{18}{37}}_{\substack{\text{5. Wurf}\\ \text{ist rot}}}\cdot\frac{19}{37}\cdot\frac{19}{37}=\left(\frac{18}{37}\right)^3\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^4=0{,}0080$$

2 Berechnen Sie ebenfalls auf 4 Nachkommastellen gerundet die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei zweimaligem Werfen der Kugel
a) mindestens einmal eine Zahl aus dem ersten Dutzend, das heißt von 1 bis 12, erscheint.
b) keine Zahl aus dem ersten Dutzend zweimal erscheint. (6 BE)

Es handelt sich hier um ein Bernoulli-Experiment der Kettenlänge $n=2$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p=\frac{12}{37}$.

a) $P^{2}_{\frac{12}{37}}(X\ge 1)=1-P^{2}_{\frac{12}{37}}(X=0)=1-\underbrace{\binom{2}{0}}_{=1}\cdot\underbrace{\left(\frac{12}{37}\right)^0}_{=1}\cdot\left(\frac{25}{37}\right)^2=1-\left(\frac{25}{37}\right)^2=\frac{744}{1369}\approx 0{,}543$

b) $P(\text{"keine Zahl aus dem ersten Dutzend erscheint zweimal"})=$

$=1-P(\text{"Zahl aus dem ersten Dutzend erscheint zweimal"})=$

$$=1-\underbrace{12}_{\substack{\text{Anz. d.}\\ \text{Möglichkeiten}}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{37}\right)^2}_{\substack{\text{Wahrsch. eines}\\ \text{Doppeltreffers}}}=\frac{1357}{1389}\approx 0{,}991$$

3.0 Von den Zahlen des ersten Dutzends sind genau sechs rot und sechs schwarz gefärbt. Folgende Ereignisse werden betrachtet:

E_1: „Eine Zahl aus dem ersten Dutzend erscheint."

E_2: „Eine rote Zahl erscheint."

3.1 Erstellen Sie in Bezug auf E_1 und E_2 eine Vierfeldertafel und begründen Sie rechnerisch, ob die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig sind. (6 BE)

	E_1	$\overline{E}_1$	$\sum$
E_2	$\frac{6}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{18}{37}$
$\overline{E}_2$	$\frac{6}{37}$	$\frac{13}{37}$	$\frac{19}{37}$
$\sum$	$\frac{12}{37}$	$\frac{25}{37}$	1

$$\left.\begin{array}{l} P(E_1)\cdot P(E_2)=\frac{12}{37}\cdot\frac{18}{37}=\frac{216}{1369} \\ P(E_1\cap E_2)=\frac{6}{37} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P(E_1)\cdot P(E_2)\neq P(E_1\cap E_2)$$

Somit sind die Ereignisse E_1 und E_2 stochastisch abhängig.

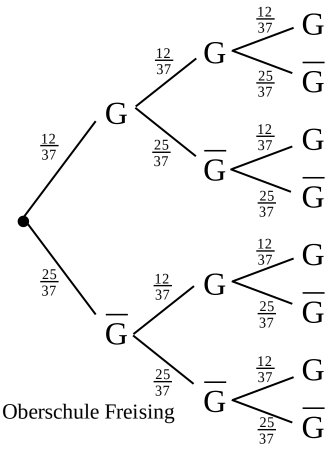
3.2 Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit: $P(E_1\cup E_2)$. (2 BE)

$$P(E_1\cup E_2)=1-P(E_1\cap E_2)=1-\frac{6}{37}=\frac{31}{37}$$

4.0 Lord Grips setzt immer nur auf das Ereignis „Zahl aus dem ersten Dutzend", das heißt, seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt bei jedem Spiel $p_G=\frac{12}{37}$. Lord Grips setzt nun dreimal nacheinander den gleichen Einsatz **e** auf „Zahl aus dem ersten Dutzend". Falls er in einem Spiel gewinnt, beträgt sein Reingewinn 2·**e**, andernfalls geht sein Einsatz verloren (–**e**). Die Zufallsgröße X gibt den Gesamtgewinn für alle 3 Spiele in Euro an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X lässt sich mit Hilfe folgender Tabelle angeben:

x	–3e	0	3e	6e
$P(X=x)$				

4.1 Übernehmen Sie die Tabelle und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der Zufallswerte z.B. mit Hilfe eines Baumdiagramms auf 4 Nachkommastellen. (7 BE)



$\{\omega_i\}$	$P(\{\omega_i\})$
GGG	$\left(\frac{12}{37}\right)^3=\frac{1728}{50653}$
$GG\overline{G}$	$\left(\frac{12}{37}\right)^2\cdot\frac{25}{37}=\frac{3600}{50653}$
$G\overline{G}G$	$\left(\frac{12}{37}\right)^2\cdot\frac{25}{37}=\frac{3600}{50653}$
$G\overline{G}\,\overline{G}$	$\frac{12}{37}\cdot\left(\frac{25}{37}\right)^2=\frac{7500}{50653}$
$\overline{G}GG$	$\left(\frac{12}{37}\right)^2\cdot\frac{25}{37}=\frac{3600}{50653}$
$\overline{G}G\overline{G}$	$\frac{12}{37}\cdot\left(\frac{25}{37}\right)^2=\frac{7500}{50653}$
$\overline{G}\,\overline{G}G$	$\frac{12}{37}\cdot\left(\frac{25}{37}\right)^2=\frac{7500}{50653}$
$\overline{G}\,\overline{G}\,\overline{G}$	$\left(\frac{25}{37}\right)^3=\frac{15625}{50653}$

x	$-3e$	0	$3e$	$6e$
$P(X=x)$	$\frac{15625}{50653}$	$3\cdot\frac{7500}{50653}=\frac{22500}{50653}$	$3\cdot\frac{3600}{50653}=\frac{10800}{50653}$	$\frac{1728}{50653}$

Man kann natürlich auch die Ergebnisse auf drei, vier oder fünf Nachkommastellen runden. Allerdings wird man dann für die Summe der Wahrscheinlichkeiten nicht mehr 1 herausbekommen (Rundungsfehler!).

4.2 Setzen Sie nun **e** = 100 und berechnen Sie den Erwartungswert E(X) sowie die zugehörige Standardabweichung. (4 BE)

x	-300	0	300	600
$P(X=x)$	$\frac{15625}{50653}$	$3\cdot\frac{7500}{50653}=\frac{22500}{50653}$	$3\cdot\frac{3600}{50653}=\frac{10800}{50653}$	$\frac{1728}{50653}$

$$E(X)=-300\cdot\tfrac{15625}{50653}+0\cdot\tfrac{22500}{50653}+300\cdot\tfrac{10800}{50653}+600\cdot\tfrac{1728}{50653}=-8\tfrac{4}{37}\approx-8{,}11$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X)&=\left(-300-\left(-8\tfrac{4}{37}\right)\right)^2\cdot\tfrac{15625}{50653}+\left(0-\left(-8\tfrac{4}{37}\right)\right)^2\cdot\tfrac{22500}{50653}+\\&\quad+\left(300-\left(-8\tfrac{4}{37}\right)\right)^2\cdot\tfrac{10800}{50653}+\left(600-\left(-8\tfrac{4}{37}\right)\right)^2\cdot\tfrac{1728}{50653}=59167{,}28\end{aligned}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{59167{,}28}=243\tfrac{9}{37}\approx243{,}24$$

5.0 Im Folgenden werden Spiele, bei denen die 0 erscheint, außer Acht gelassen. Dann sollte das Ereignis „Zahl aus dem ersten Dutzend“ im Schnitt in einem Drittel aller Spiele eintreten. Lord Grips vermutet, dass dieses Ereignis bei einem bestimmten Roulette-Tisch im Casino von Nepphausen mit zu geringer Häufigkeit erscheint (Gegenhypothese). Daher beobachtet er 200 Kugelwürfe in Hinblick auf „erstes Dutzend“.

5.1 Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie Null- und Gegenhypothese an und ermitteln Sie deren größtmöglichen Ablehnungsbereich, wenn das Signifikanzniveau 5 % betragen soll. (5 BE)

Testgröße X: Anzahl der Zahlen aus dem ersten Dutzend $(n=200)$

Nullhypothese: $p=\frac{1}{3}$ $\quad A=\{k+1;\ldots;200\}$

Gegenhypothese: $p<\frac{1}{3}$ $\quad \overline{A}=\{0;1;2;\ldots;k\}$ $\quad$ linkss. Signifikanztest

Signifikanzniveau: $\alpha=0{,}05$

Ablehnungsbereich: $P_{\frac{1}{3}}^{200}(X\le k)<0{,}05 \quad\Rightarrow\quad k=55$

Annahmebereich: $A=\{56;57;\ldots;200\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A}=\{0;1:\ldots;55\}$

5.2 Erklären Sie, worin bei diesem Beispiel der Fehler 2. Art besteht und begründen Sie kurz, weshalb man dessen Wahrscheinlichkeit hier nicht berechnen kann. (3 BE)

Obwohl die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl aus dem ersten Dutzend zu erhalten geringer geworden ist, wird dies aufgrund des Testergebnisses nicht erkannt.

Die Wahrscheinlichkeit kann nicht berechnet werden, da die Trefferwahrscheinlichkeit $\left(p < \frac{1}{3}\right)$ unbekannt ist.