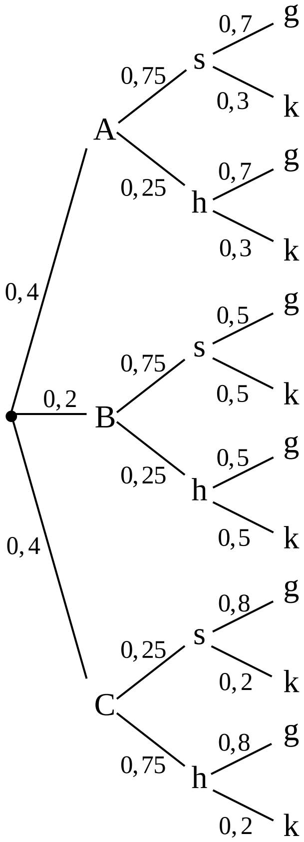
2008 SII

Ein Spezialitätengeschäft bietet 3 Sorten Kaviar an: A, B und C. Der Kaviar wird jeweils in den Farben Schwarz (s) und Hellbraun (h) angeboten und zwar in kleinen (k) oder großen (g) Blechdosen.
Da ein Großteil der Kunden jeweils nur eine Dose Kaviar kauft, werden im Folgenden nur diese Kunden betrachtet. Erfahrungsgemäß entscheiden sich 20% dieser Kunden für B-Kaviar, die anderen wählen zu gleichen Teilen die Sorten A und C. Der Verkaufsanteil an schwarzem Kaviar ist bei den Sorten A und B dreimal so hoch wie an hellbraunem, bei der Sorte C ist es jedoch umgekehrt. Sorte A wird zu 70% als große Dose gekauft, Sorte B zu 50% und Sorte C zu 80% und zwar unabhängig von der Farbe.
Die Entscheidung eines zufällig ausgewählten Käufers für eine bestimmte Dose Kaviar wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Interpretieren Sie bei den folgenden Aufgaben alle relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

1 Berechnen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller zwölf Elementarereignisse. (8 BE)
$\left[\text{Teilergebnis}: P(\{Asg\}) = 0,21\right]$



ω_i	$P(\{\omega_i\})$	E_1	E_2
Asg	0,21		
Ask	0,09		
Ahg	0,07		
Ahk	0,03	x	
Bsg	0,075		x
Bsk	0,075		x
Bhg	0,025		
Bhk	0,025	x	
Csg	0,08		x
Csk	0,02		x
Chg	0,24		
Chk	0,06	x	

2 Gegeben sind die Ereignisse
E_1: „Der Kunde kauft hellbraunen Kaviar in einer kleinen Dose.“
E_2: „Der Kunde kauft schwarzen Kaviar, aber nicht die Sorte A.“
Stellen Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise dar und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten. Untersuchen Sie anschließend beide Ereignisse auf Unvereinbarkeit. (6 BE)

$E_1 = \{Ahk; Bhk; Chk\}$

$E_2 = \{Bsg; Bsk; Csg; Csk\}$

Da $E_1 \cap E_2 = \{\ \}$ sind die Ereignisse E_1 und E_2 unvereinbar.

3.0 Von 200 Kaviar-Käufern kauften in der Woche vor Ostern 130 A-Kaviar. 90 dieser 200 Personen klagten nach dem Verzehr über Unwohlsein (U), darunter 10, die keinen A-Kaviar gegessen hatten.

3.1 Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt mit Hilfe einer Vierfeldertafel dar. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Ereignisse
K: „Die Person isst A-Kaviar“ und
U: „Es tritt Unwohlsein auf“
stochastisch unabhängig sind.
Geben Sie eine mögliche Interpretation Ihres Ergebnisses im Sinne der vorliegenden Thematik. (6 BE)

	K	$\overline{K}$	$\sum$
U	0,40	0,05	0,45
$\overline{U}$	0,25	0,30	0,55
$\sum$	0,65	0,35	1

$$\left.\begin{array}{l} P(K)\cdot P(U) = 0{,}65\cdot 0{,}45 = 0{,}2925 \\ P(K\cap U) = 0{,}4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P(K)\cdot P(U) \neq P(K\cap U)$$

Somit sind die Ereignisse K und U stochastisch abhängig.
D.h.: Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Verzehr von A-Kaviar und dem Auftreten des Unwohlseins.

3.2 Geben Sie mit Hilfe einer Vierfeldertafel ein Zahlenbeispiel Ihrer Wahl an, in dem die beiden Ereignisse K und U stochastisch unabhängig sind und begründen Sie kurz diese Unabhängigkeit. (3 BE)

	K	$\overline{K}$	$\sum$
U	0,24	0,16	0,4
$\overline{U}$	0,36	0,24	0,6
$\sum$	0,6	0,4	1

$$\left.\begin{array}{l} P(K)\cdot P(U) = 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}24 \\ P(K\cap U) = 0{,}24 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P(K)\cdot P(U) = P(K\cap U)$$

Somit wären die Ereignisse K und U stochastisch unabhängig.

4.0 Es werden nun 12 zufällig ausgewählte Kaviarkäufer betrachtet. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Kunden an, die sich für B-Kaviar entscheiden (1.0 beachten!).

4.1 Gegeben sind die Ereignisse

E_3 : „Genau 3 Kunden entscheiden sich für B-Kaviar."

E_4 : „Nur der 4., der 6. und der 11. Kunde kaufen B-Kaviar."

Berechnen Sie $P(E_3)$ sowie (exakt!) den Faktor a, für den gilt:

$P(E_3) = a \cdot P(E_4)$ (3 BE)

$$P(E_3) = P_{0,2}^{12}(X=3) = \binom{12}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^9 \approx 0,236$$

$$P(E_4) = 0,2^3 \cdot 0,8^9 \approx 0,001$$

Es gilt:

$$P(E_3) = a \cdot P(E_4)$$

$$\binom{12}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^9 = a \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^9$$

$$\binom{12}{3} = a$$

$$a = 220$$

4.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

E_5 : „Genau 3 aufeinanderfolgende Kunden kaufen B-Kaviar." (2 BE)

$$P(E_5) = 10 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^9 \approx 0,011$$

4.3 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (4 BE)

$$\mu = n \cdot p = 12 \cdot 0,2 = 2,4$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{12 \cdot 0,2 \cdot 0,8} \approx 1,39$$

$$P(|X-\mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu - \sigma) = P(2,4 - 1,39 < X < 2,4 + 1,39)$$

$$= P(1,01 < X < 3,79) = P_{0,2}^{12}(X=2) + P_{0,2}^{12}(X=3)$$

$$= \binom{12}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{10} + \binom{12}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^9 \approx 0,520$$

5.0 An einem bestimmten Tag stellt der Abteilungsleiter fest, dass von insgesamt 65 Kaviarkäufern sich 18 für die Sorte B entschieden haben. Er vermutet nun, dass sich der Anteil der B-Käufer erhöht hat.

5.1 Begründen Sie kurz, worauf sich diese Vermutung stützen könnte. (2 BE)

Man würde eigentlich vermuten, dass bei 65 Kaviarkäufern $0,2 \cdot 65 = 13$ Käufer B-Kaviar kaufen würden (Erwartungswert). Da die Zahl 18 aber deutlich über dem Erwartungswert liegt, liegt die Vermutung nahe, dass sich der Anteil der Käufer für B-Kaviar erhöht hat.

5.2 Die Geschäftsleitung lässt daraufhin einen Signifikanztest mit 200 zufällig ausgewählten Kunden durchführen. Auf dem 5%-Niveau soll ermittelt werden, ob der Anteil der B-Kunden wirklich gestiegen sein könnte (Gegenhypothese). Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese H_0 an und ermitteln Sie deren maximalen Ablehnungsbereich.
Bewerten Sie anschließend folgende Aussage: „Wenn von den 200 Kunden mindestens jeder vierte B-Kaviar kauft, kann man auf dem 5%-Niveau mit einer Zunahme dieses Käuferanteils schließen.“ (6 BE)

Testgröße X: Anzahl der Kaviarkäufer, die B-Kaviar kaufen $(n = 200)$

Nullhypothese: $p = 0,2$ $A = \{0; 1; 2; ...; k\}$

Gegenhypothese: $p > 0,2$ $\overline{A} = \{k+1; ...; 200\}$ rechtsseit. Signifikanztest

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Ablehnungsbereich: $P_{0,2}^{200}(X \geq k+1) < 0,05$

$1 - P_{0,2}^{200}(X \leq k) < 0,05$

$P_{0,2}^{200}(X \leq k) > 0,95 \quad \Rightarrow \quad k = 49$

Annahmebereich: $A = \{0; 1; ...; 49\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{50; 51: ...; 200\}$

Wenn von den 200 Kunden mindestens jeder vierte B-Kaviar kauft, dann kaufen 50 B-Kaviar. Da 50 im Ablehnungsbereich steht ist die gegebene Aussage richtig.