2013 B I Lösung

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist die Menge der Ebenen $E_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu, a \in \mathbb{R}$ gegeben, außerdem die Menge der Punkte $C_{k,m}\left(2k-3m-1 \mid m-3 \mid -k+m+4\right)$ mit $k, m \in \mathbb{R}$.
3	1.1	Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, auf der alle Punkte $C_{k,m}$ liegen. $\left[\text{ Mögliches Ergebnis: } F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \right]$

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2k-3m-1 \\ m-3 \\ -k+m+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3m \\ m \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow F: x_1 + x_2 + 2x_3 + c = 0$$

Aufpunkt einsetzen: $-1-3+2\cdot 4+c=0 \Rightarrow c=-4$

Somit folgt: $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

3	1.2	Zeigen sie, dass die Ebene F auch in der Menge der Ebenen E_a enthalten ist.

E_a in F einsetzen:

$$2-\lambda+a\mu+\lambda+a\mu+2\left(1+\mu\left(a+1\right)\right)-4=0$$
$$2+2a\mu+2+2a\mu+2\mu-4=0$$
$$4a\mu+2\mu=0$$
$$4\mu\cdot\left(a+\tfrac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow a=-\tfrac{1}{2}$$

3	1.3	Die Ebene F schneidet die x_1-Achse im Punkt S_1 und die x_2-Achse im Punkt S_2. Diese Punkte bilden mit dem Koordinatenursprung und dem Punkt $P\left(1 \mid 1 \mid 1\right)$ eine dreiseitige Pyramide. Berechnen Sie die Volumenmaßzahl dieser Pyramide.

Schnitt von F mit der x_1-Achse: $x_2=0$ und $x_3=0$ in F einsetzen,

$x_1-4=0 \Rightarrow x_1=4 \Rightarrow S_1\left(4 \mid 0 \mid 0\right)$

Schnitt von F mit der x_2-Achse: $x_1=0$ und $x_3=0$ in F einsetzen,

$x_2-4=0 \Rightarrow x_2=4 \Rightarrow S_2\left(0 \mid 4 \mid 0\right)$

Somit folgt für das Volumen der dreiseitigen Pyramide:

$$V = \tfrac{1}{6}\cdot \det\left(\overrightarrow{OS_1}, \overrightarrow{OS_2}, \overrightarrow{OP}\right) = \tfrac{1}{6}\cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{6}\cdot(16+0+0-0-0-0) = \tfrac{8}{3}$$

ODER: $$V = \tfrac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{OS_1}\times\overrightarrow{OS_2}\right)\circ\overrightarrow{OP}\right| = \tfrac{1}{6}\cdot\left|\left(\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\16\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{6}\cdot 16 = \tfrac{8}{3}$$

7 1.4 Es gibt zwei verschiedene Ebenen E_{a_1} und E_{a_2}, die mit der Ebene F jeweils einen Winkel von 45° einschließen. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte a_1 und a_2 auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Man benötigt zunächst den Normalenvektor der Ebene E_a:

$$\vec{n}_{E_a} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\a\\a+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+1\\a+1\\-2a\end{pmatrix}$$

Die beiden Ebenen E_a und F schließen genau dann einen Winkel von 45° ein, wenn deren Normalenvektoren einen Winkel von 45° einschließen. Somit folgt: $\cos(45°) = \dfrac{\vec{n}_{E_a}\circ\vec{n}_F}{\left|\vec{n}_{E_a}\right|\cdot\left|\vec{n}_F\right|}$

$$\vec{n}_{E_a}\circ\vec{n}_F = \begin{pmatrix}a+1\\a+1\\-2a\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = a+1+a+1-4a = 2-2a$$

$$\left|\vec{n}_F\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\left|\vec{n}_{E_a}\right| = \left|\begin{pmatrix}a+1\\a+1\\-2a\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(a+1)^2+(a+1)^2+(-2a)^2} = \sqrt{a^2+2a+1+a^2+2a+1+4a^2} = \sqrt{6a^2+4a+2}$$

Oben eingesetzt: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2-2a}{\sqrt{6a^2+4a+2}\cdot\sqrt{6}}$ und beiderseits quadriert: $\dfrac{2}{4} = \dfrac{(2-2a)^2}{(6a^2+4a+2)\cdot 6}$

Gekürzt und kreuzweise multipliziert: $(6a^2+4a+2)\cdot 6 = 2\cdot(2-2a)^2$

$$36a^2+24a+12 = 2\cdot(4-8a+4a^2)$$

$$36a^2+24a+12 = 8-16a+8a^2$$

$$28a^2+40a+4 = 0$$

$$7a^2+10a+1 = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{-10\pm\sqrt{100-28}}{14} = \frac{-10\pm\sqrt{72}}{14} = \frac{-5\pm3\sqrt{2}}{7} \approx \begin{cases}-0{,}11\\-1{,}32\end{cases}$$

7 1.5 Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit $\nu \in \mathbb{R}$, in allen Ebenen E_a enthalten ist, und berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs von dieser Geraden g mithilfe des Lotfußpunktes L.

Der Normalenvektor von E_a wurde schon in 1.4 berechnet: $\vec{n}_{E_a} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2a \end{pmatrix}$

Somit folgt: $E_a: (a+1)x_1 + (a+1)x_2 - 2ax_3 + c = 0$

Aufpunkt von E_a einsetzen: $E_a: (a+1) \cdot 2 - 2a \cdot 1 + c = 0 \;\Rightarrow\; 2a + 2 - 2a + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -2$

Und somit: $E_a: (a+1)x_1 + (a+1)x_2 - 2ax_3 - 2 = 0$

Nun setzt man g in $E_a: (a+1)(-1+\nu) + (a+1)(3-\nu) - 2a - 2 = 0$

$$-a + a\nu - 1 + \nu + 3a - a\nu + 3 - \nu - 2a - 2 = 0$$

$$0 = 0 \quad (w)$$

Somit liegt die Gerade g in allen Ebenen E_a.

Für den Lotfußpunkt L der Geraden g gilt: $\overrightarrow{OL} \perp g$

Somit muss gelten:

$$\overrightarrow{OL} \circ \vec{u}_g = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -1+\nu \\ 3-\nu \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -1 + \nu - 3 + \nu = 0 \;\Rightarrow\; 2\nu - 4 = 0 \;\Rightarrow\; \nu = 2$$

Für den Abstand des Punktes L vom Koordinatenursprung folgt dann:

$$\left|\overrightarrow{OL}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1+2 \\ 3-2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

7 | 2 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$ die Ebenen G_r, H_r und K_r gegeben:

$G_r: \quad x_1 + 17 \cdot x_2 - r \cdot x_3 + 19 = 0$

$H_r: \quad x_1 + (r-6) \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 7 = 0$

$K_r: \quad -2 \cdot x_1 - 14 \cdot x_2 + r \cdot x_3 - 22 = 0$

Ermitteln Sie die Werte für r, für welche die Ebenen G_r, H_r und K_r keinen Schnittpunkt, genau einen Schnittpunkt bzw. unendlich viele Schnittpunkte haben.

Durch eine kleine Umformung erhält man:

$$\begin{array}{rl} x_1 + 17 \cdot x_2 - r \cdot x_3 = -19 & \quad \cdot 2 \\ x_1 + (r-6) \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = -7 & \quad - \\ -2 \cdot x_1 - 14 \cdot x_2 + r \cdot x_3 = 2 & \quad + \\ \hline x_1 + 17 \cdot x_2 - r \cdot x_3 = -19 & \\ (23-r) \cdot x_2 + (2-r) \cdot x_3 = -12 & \quad \cdot 20 \\ 20 \cdot x_2 - r \cdot x_3 = -16 & \quad \cdot (23-r) \quad - \\ \hline x_1 + 17 \cdot x_2 - r \cdot x_3 = -19 & \\ (23-r) \cdot x_2 + (2-r) \cdot x_3 = -12 & \\ (-r^2 + 3r + 40) \cdot x_3 = 128 - 16r & \end{array}$$

Nebenrechnung linke Seite:

$20 \cdot (2-r) - (-r) \cdot (23-r) = 40 - 20r + 23r - r^2 = -r^2 + 3r + 40$

$-r^2 + 3r + 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{-2} = \frac{-3 \pm 13}{-2} = \begin{cases} -5 \\ 8 \end{cases}$

Zerlegung: $\quad -r^2 + 3r + 40 = -(r-8)(r+5)$

Nebenrechnung rechte Seite:

$-12 \cdot 20 - (-16) \cdot (23-r) = -240 + 368 - 16r = -16r + 128$

Zerlegung: $\quad -16r + 128 = -16(r-8)$

Somit folgt für die letzte Zeile:

$-(r-8)(r+5) \cdot x_3 = -16(r-8)$

Für $r = 8$ liefert die letzte Zeile eine wahre Aussage (beide Seiten ergeben 0):
Somit haben die Ebenen G_8, H_8 und K_8 unendlich viele Schnittpunkte.

Für $r = -5$ liefert die letzte Zeile eine falsche Aussage $(0 \cdot x_3 = -208)$:
Somit haben die Ebenen G_{-5}, H_{-5} und K_{-5} keine gemeinsamen Schnittpunkte.

Für $r = \mathbb{R} \backslash \{-5; 8\}$ stellt die letzte Zeile eine lösbare Gleichung dar:
Somit haben die Ebenen G_r, H_r und K_r genau einen Schnittpunkt.

30