2013 B II Lösung

1.1 $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}8\\0\\0,4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}8-0\\8-8\\0,8-0,4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\0,4\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow AB=DC$

Somit ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

$$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}8\\0\\0,4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\8\\0,4\end{pmatrix}=0,16\neq 0 \Rightarrow \sphericalangle DAB\neq 90°$$

Somit ist das Viereck ABCD kein Rechteck.

$$A_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\begin{pmatrix}8\\0\\0,4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\8\\0,4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3,2\\-3,2\\64\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-3,2)^2+(-3,2)^2+64^2}$$

$$A_{ABCD}=\sqrt{4116,48}\approx 64,2$$

$$V=\tfrac{1}{2}\cdot\ell\cdot b\cdot h=\tfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot 0,8=25,6$$

1.2.1 Die Ebene E verläuft echt parallel zur x_2-Achse. Somit folgt für einen möglichen Richtungsvektor der Ebene E in Parameterform: $\vec{u}_E=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Nun benötigt man noch zwei Punkte, welche in der Ebene $E:-3x_1+4x_3=16$ liegen.

Wähle dazu: $x_2=0$ und $x_1=0$, dann folgt: $4x_3=16 \Rightarrow x_3=4$. Somit $P_1(0|0|4)$

Wähle dazu: $x_2=0$ und $x_3=1$, dann folgt: $-3x_1+4=16 \Rightarrow x_1=-4$. Somit $P_2(-4|0|1)$.

$E:\vec{x}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\cdot\vec{u}_E+\mu\cdot\overrightarrow{P_1P_2}$ also folgt: $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\-3\end{pmatrix}$

Für die Ebene F folgt: $F:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\4\\7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1,5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-2\\3\\1,5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9-3\\6-6\\-4-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\0\\-16\end{pmatrix}=-4\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_F=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

Nun V in $F:3x_1+4x_3+c=0$ einsetzen: $3\cdot 4+4\cdot 7+c=0 \Rightarrow c=-40$

Somit erhält man: $F:3x_1+4x_3-40=0$

1.2.2 Die $x_1 - x_2 -$ Ebene (Grundfläche) hat den Normalenvektor $\vec{n}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\beta_E) = \frac{\left|\vec{n}_E \circ \vec{n}_G\right|}{\left|\vec{n}_E\right| \cdot \left|\vec{n}_G\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{4}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta_E = 36{,}9°$$

$$\cos(\beta_F) = \frac{\left|\vec{n}_F \circ \vec{n}_G\right|}{\left|\vec{n}_F\right| \cdot \left|\vec{n}_G\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{4}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta_F = 36{,}9°$$

Die beiden Dachflächen treffen somit unter eine Winkel von
$\gamma = 180° - 2 \cdot \beta_E = 180° - 2 \cdot 36{,}9° = 106{,}2°$ aufeinander.

1.2.3

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_3 - 16 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_3 - 40 &= 0 \quad (+) \\ \hline 8x_3 - 56 &= 0 \Rightarrow x_3 = 7 \\ 3x_1 + 4 \cdot 7 - 40 &= 0 \Rightarrow x_1 = 4 \end{aligned}$$

Wähle noch $x_2 = \tau$, dann folgt für die Schnittgerade $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ \tau \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da der Aufpunkt der Geraden s in der $x_1 - x_3 -$ Ebene liegt, folgt: $R_1(4|0|7)$

Und da die Länge der Scheune 8 Meter beträgt folgt mit $\tau = 8$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow R_2(4|8|7)$$

1.2.4 Für die Lotgerade h zu E durch P gilt: $h: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \kappa \cdot \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Eingesetzt in $E: -3x_1 + 4x_3 = 16$

$-3 \cdot (-3\kappa) + 4 \cdot (3 + 4\kappa) = 16 \Rightarrow 9\kappa + 12 + 16\kappa = 16 \Rightarrow \kappa = \frac{4}{25}$

Somit folgt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{4}{25} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ 4 \\ \frac{91}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}48 \\ 4 \\ 3{,}64 \end{pmatrix} \Rightarrow L(-0{,}48|4|3{,}64)$

Mindestlänge: $\left|\overrightarrow{LP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 + 0{,}48 \\ 4 - 4 \\ 3 - 3{,}64 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0{,}48 \\ 0 \\ -0{,}64 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}48^2 + 0^2 + (-0{,}64)^2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$