2011 B I Angabe

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind in Abhängigkeit der Variablen $p, q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix}$ gegeben.
2	1.1	Zeigen Sie, dass unabhängig von der Wahl der Werte für p und q die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.
		Die Vektoren stehen aufeinander senkrecht, wenn gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$
		$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix} = (p-q)^2 + (-p)\cdot p + q\cdot(2p-q) = p^2 - 2pq + q^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 0$
	1.2.0	Setzen Sie nun $p = 2$ und $q = 1$. Daraus ergeben sich mit dem Koordinatenursprung O die Ortsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ für die Punkte A und B.
		Also erhält man: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad A(1 \mid -2 \mid 1)$ und $B(1 \mid 2 \mid 3)$
3	1.2.1	Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene E, in der die Punkte A und B sowie der Koordinatenursprung O liegen. Geben Sie die Ebene E auch in Koordinatenform an.
		$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 3 - 1\cdot 2 \\ 1\cdot 1 - 1\cdot 3 \\ 1\cdot 2 - (-2\cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
		$E: \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow E: 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$
7	1.2.2	Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs O von der durch den Punkt A und B festgelegten Geraden g. Bestimmen Sie auch den Punkt L auf der Geraden g, der die geringste Entfernung vom Ursprung hat. $[\text{Teilergebnis}: L(1; -0{,}8; 1{,}6)]$
		Man stellt zunächst die Gleichung der Geraden g auf.
		$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

Der Verbindungsvektor vom Ursprung zum Lotfußpunkt L (der Punkt der Gerade, der auch den geringsten Abstand vom Ursprung hat) muss senkrecht auf der Geraden stehen, somit gilt:

$$\overrightarrow{OL} \circ \vec{u}_g = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2+4\lambda \\ 1+2\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$1\cdot 0 + 4(-2+4\lambda) + 2(1+2\lambda) = 0$$

$$-8+16\lambda+2+4\lambda = 0$$

$$20\lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = 0,3$$

Somit folgt für den Lotfußpunkt L:

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+4\cdot 0,3 \\ 1+2\cdot 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L(1|0,8|1,6)$$

Und jetzt noch den Abstand:

$$d = \left|\overrightarrow{OL}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-0,8)^2 + 1,6^2} = \sqrt{4,2}$$

9 1.2.3 Die Punkte S_1 und S_2 liegen auf der Geraden g. Die Strecke $[S_1S_2]$ bildet die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Koordinatenursprung O als Spitze. Dieses Dreieck besitzt die Flächenmaßzahl $A_\Delta = 2\cdot\sqrt{4,2}$.

Fertigen Sie eine Lageskizze der Punkte O, A, B, L, S_1 und S_2 an und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2. Runden Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 auf zwei Stellen nach dem Komma.

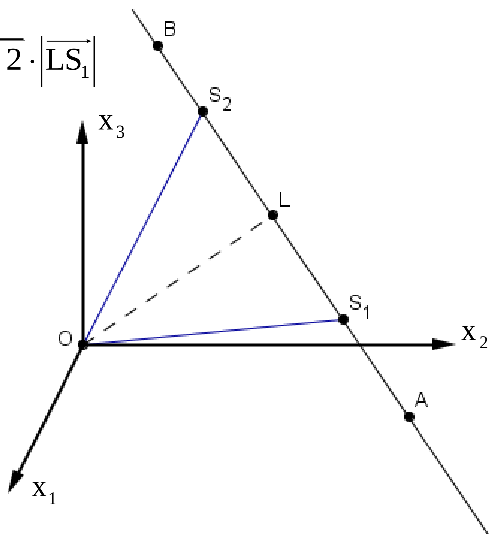
$\left[\text{Zwischenergebnis}: \left|\overrightarrow{LS_1}\right| = 2\right]$

Für die Fläche des Dreiecks OS_1S_2 gilt:

$$A_\Delta = \tfrac{1}{2}\cdot g\cdot h = \tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OL}\right|\cdot\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right| = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{4,2}\cdot 2\cdot\left|\overrightarrow{LS_1}\right| = \sqrt{4,2}\cdot\left|\overrightarrow{LS_1}\right|$$

Da aber nach Angabe auch gilt: $A_\Delta = 2\cdot\sqrt{4,2}$

Muss gelten: $\left|\overrightarrow{LS_1}\right| = 2$



Das sind also alle Punkte auf der Geraden, welche auf der Geraden g liegen und von L den Abstand 2 haben. Nimmt man für den Punkt S_1 den allgemeinen Geradenpunkt her, so folgt:

$$\left|\overrightarrow{LS_1}\right| = 2$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2+4\lambda \\ 1+2\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,6 \end{pmatrix}\right| = 2$$

$$\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4\lambda-1,2 \\ 2\lambda-0,6 \end{pmatrix}\right| = 2$$

$$\sqrt{0^2+(4\lambda-1,2)^2+(2\lambda-0,6)^2} = 2 \qquad |(\ldots)^2$$

$$16\lambda^2-9,6\lambda+1,44+4\lambda^2-2,4\lambda+0,36 = 4$$

$$20\lambda^2-12\lambda-2,2 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 20\cdot(-2,2)}}{2\cdot 20} = \frac{12\pm\sqrt{320}}{40} = \frac{12\pm 8\sqrt{5}}{40} = \frac{3\pm 2\sqrt{5}}{10}$$

Diese beiden Werte für λ nun wieder in die Geradengleichung eingesetzt, erhält man die beiden Punkte S_1 und S_2:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3+2\sqrt{5}}{10}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,99 \\ 2,49 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(1|0,99|2,49)$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3-2\sqrt{5}}{10}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2,59 \\ 0,71 \end{pmatrix} \Rightarrow S_2(1|-2,59|0,71)$$

2.0 Die folgenden Gleichungen I, II und III stellen jeweils Ebenen in Koordinatenform dar:

I $\quad x_1+x_2+2x_3=3$

II $\quad x_2+x_3=1$

III $\quad 2x_1-x_2+x_3=c, \quad$ wobei $c\in\mathbb{R}$.

4 2.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von c die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems.

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & x_1+x_2+2x_3=3 & \cdot 2 \\ \text{II} & x_2+x_3=1 & \\ \text{III} & 2x_1-x_2+x_3=c & - \\ \hline & x_2+x_3=1 & \cdot 3 \\ & 3x_2-3x_3=6-c & - \\ \hline & 0=-3+c & \end{array}$$

Für $c=3$ erhält man in der letzten Zeile ein wahre Aussage (Nullzeile), das Gleichungssystem hat somit unendlich viele Lösungen.
Für $c\neq 3$ erhält man in der letzte Zeile eine falsche Aussage, das Gleichungssystem hat somit keine Lösung.

5 | 2.2 Bestimmen Sie für $c=3$ die Lösung des Gleichungssystems und interpretieren Sie die gegenseitige Lage der drei Ebenen.

Falls $c=3$ ist, dann wählt man $x_3=\lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die zweite Zeile liefert dann: $x_2+\lambda=1 \quad \Rightarrow \quad x_2=1-\lambda$

und eingesetzt in die erste Zeile: $x_1+1-\lambda+2\cdot\lambda=3 \quad \Rightarrow \quad x_1=2-\lambda$

Die drei Ebenen schneiden sich somit in einer Gerade, für die Gleichung der Geraden s folgt dann:

$$s: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

30