2011 B II Lösung

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $P(1;0;0)$, $Q(0;1;0)$, $R(0;0;1)$ und $S_k(k;k;k)$ mit $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gegeben.
6	1.1	Berechnen Sie die Werte des Parameters k, für die die gegebenen Punkte eine dreiseitige Pyramide aufspannen.

Die vier Punkte bilden keine dreiseitige Pyramide, wenn die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{PS_k}$ linear abhängig sind, also wenn gilt:

$$\det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS_k}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-1 \\ k \\ k \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & k-1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$0 + 0 + (k-1) - 0 - (-k) - (-k) = 0$$

$$3k - 1 = 0$$

$$k = \tfrac{1}{3}$$

Somit bilden die Punkte eine dreiseitige Pyramide für alle $k \in \mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{1}{3}\right\}$

6	1.2	Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters k die Pyramide ein reguläres Tetraeder, also eine gleichseitige Pyramide ist.

Es müssen also alle sechs Kanten gleich lang sein; also muss gelten:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{PS_k}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right| = \left|\overrightarrow{QS_k}\right| = \left|\overrightarrow{RS_k}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{QR}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{PS_k}\right| = \left|\begin{pmatrix} k-1 \\ k \\ k \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(k-1)^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{3k^2 - 2k + 1}$$

$$\left|\overrightarrow{QS_k}\right| = \left|\begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ k \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3k^2-2k+1}$$

$$\left|\overrightarrow{RS_k}\right| = \left|\begin{pmatrix} k \\ k \\ k-1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3k^2-2k+1}$$

Somit folgt: $\sqrt{3k^2-2k+1} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 3k^2-2k+1=2 \quad \Rightarrow \quad 3k^2-2k-1=0$

$$k_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6} = \frac{2\pm 4}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

2.0 Methan CH_4 ist eine Kohlenwasserstoffverbindung. Das Molekül hat die Form eines regulären Tetraeders, in dessen Ecken sich die H-Atome befinden.
Das C-Atom liegt im Punkt C, gleich weit von allen H-Atomen entfernt. Der Punkt C teilt die Höhe des Tetraeders im Verhältnis 3:1. Die Ecken des Tetraeders, also die Lage der H-Atome, seien die Punkte aus 1.0 mit $k=1$, also $P(1;0;0)$, $Q(0;1;0)$, $R(0;0;1)$ und $S_1(1;1;1)$.

3 2.1 Die Punkte P, Q und S_1 liegen in einer Ebene F. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform.
$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: F: x_1+x_2-x_3-1=0\right]$

$$\vec{n}_F = \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-(-1) \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit folgt:

$$F: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1-1+x_2-x_3=0$$

$$F: x_1+x_2-x_3-1=0$$

3 2.2 Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders PQS_1R.

Für das Volumen des Tetraeders PQS_1R gilt:

$$V = \tfrac{1}{6}\cdot\det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS_k}\right) = \tfrac{1}{6}\cdot(3k-1) \overset{k=1}{=} \tfrac{1}{6}\cdot(3-1) = \tfrac{1}{3} \qquad (\text{vgl. } 1.1)$$

4 2.3 Der Punkt T ist der Fußpunkt des vom Punkt R auf die Ebene F gefällten Lotes.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T.
$\left[\text{Ergebnis}: T\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)\right]$

Man bildet hier eine Gerade durch den Punkt R mit dem Normalenvektor $\vec{n}_F$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und setzt diese in die Ebene F ein:

$$F: \mu + \mu - (1 - \mu) - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 3\mu - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \mu = \tfrac{2}{3}$$

das nun wieder in die Geradengleichung eingesetzt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; T\left(\tfrac{2}{3} \middle| \tfrac{2}{3} \middle| -\tfrac{1}{3}\right)$$

4 2.4 Berechnen Sie die Koordinaten des C-Atoms.
$\left[\text{Ergebnis}: C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right]$

Der Punkt C liegt auf der Strecke $[RT]$ und teilt diese im Verhältnis 3:1 (liegt näher an T), also gilt: $\overline{RC} : \overline{CT} = 3:1$
Somit folgt: $\overrightarrow{RC} = 3 \cdot \overrightarrow{CT}$

$$\vec{c} - \vec{r} = 3 \cdot \left(\vec{t} - \vec{c}\right)$$
$$\vec{c} - \vec{r} = 3\vec{t} - 3\vec{c}$$
$$4\vec{c} = 3\vec{t} + \vec{r}$$
$$\vec{c} = \tfrac{1}{4} \cdot \left(3\vec{t} + \vec{r}\right)$$
$$\vec{c} = \tfrac{1}{4} \cdot \left(3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; C\left(\tfrac{1}{2} \middle| \tfrac{1}{2} \middle| \tfrac{1}{2}\right)$$

4 | 2.5 Bestimmen Sie den Winkel ρ zwischen zwei C-H-Bindungen, also z.B. den Winkel PCS_1.

Für den Winkel ρ gilt:

$$\cos\rho = \frac{\overrightarrow{CS_1}\cdot\overrightarrow{CP}}{\left|\overrightarrow{CS_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CP}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \quad \rho \approx 109{,}5°$

30