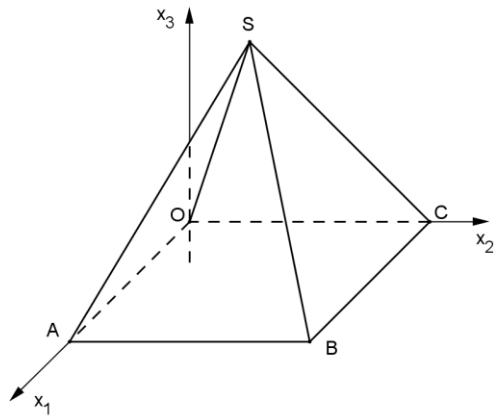
2010 B I Angabe



Vor dem Louvre, dem berühmten Pariser Kunstmuseum, wurde im Jahr 1989 eine Glaspyramide erbaut, welche den unterirdisch liegenden Haupteingang beherbergt. Diese Pyramide wurde der Cheops-Pyramide nachempfunden. Die Seitenlänge der quadratischen, nach unten offenen Grundfläche beträgt 35 m und die Spitze S liegt lotrecht über deren Mittelpunkt in einer Höhe von 22 m. In einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem $(1\text{LE} = 1\text{m})$ sind der Ursprung O und der Punkt $B(35; 35; 0)$ zwei Eckpunkte der in der $x_1, x_2-\text{Ebene}$ liegenden horizontalen Grundfläche. Die Skizze zeigt die prinzipielle Lage der Pyramide.

2 | 1 Geben Sie die Koordinaten der beiden Eckpunkte A und C sowie der Spitze S an.

Der Punkt A liegt auf der $x_1-\text{Achse}$ und hat vom Koordinatenursprung eine Entfernung von 35LE: $A(35|0|0)$

Der Punkt C liegt auf der $x_2-\text{Achse}$ und hat vom Koordinatenursprung eine Entfernung von 35LE: $C(0|35|0)$

Der Punkt S liegt senkrecht über der Mitte des Quadrats ABCO, somit folgt für die Koordinaten von S: $S(17{,}5|17{,}5|22)$

4 | 2 Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Normalengleichung der Ebene E, in der die Punkte A, B und S liegen.
$[\text{Mögliches Teilergebnis: } E: 22x_1 + 17{,}5x_3 - 770 = 0]$

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AS}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 35-35 \\ 35-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 17{,}5-35 \\ 17{,}5-0 \\ 22-0 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -17{,}5 \\ -17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -17{,}5 \\ -17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \cdot 22 - 0 \\ 0 \\ 0 - 35 \cdot (-17{,}5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \cdot 22 \\ 0 \\ 35 \cdot 17{,}5 \end{pmatrix} = 35 \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17{,}5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17{,}5 \end{pmatrix}$$

Für die Normalengleichung $E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ folgt dann:

$$E: \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17{,}5 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Die Koordinatengleichung würde man so erhalten:

$A(35|0|0)$ in $22x_1 + 17{,}5x_3 + c = 0$ einsetzen:

$22 \cdot 35 + 17{,}5 \cdot 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -770$

Somit folgt: $E: 22x_1 + 17{,}5x_3 - 770 = 0$

4 | 3 Berechnen Sie den Neigungswinkel einer Seitenfläche gegenüber der Grundfläche.

Der Neigungswinkel α zwischen der Ebene E und der Grundfläche ist identisch mit dem Schnittwinkel der beiden Normalenvektoren dieser beiden Ebenen.

Der Normalenvektor der Ebene E (Ebene durch A, B und S) ist: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17{,}5 \end{pmatrix}$

Der Normalenvektor der Grundfläche ($x_1 - x_2 -$ Ebene) ist: $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 17{,}5 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{17{,}5}{\sqrt{790{,}25 \cdot 1}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 51{,}50°$$

3 | 4 Berechnen Sie den Flächeninhalt einer der vier gläsernen Seitenflächen.

Für den Flächeninhalt des von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$ aufgespannten Dreiecks ABS gilt:

$$F_{\triangle ABS} = \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -17{,}5 \\ -17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 770 \\ 0 \\ 612{,}5 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{770^2 + 612{,}5^2} = 491{,}95$$

5.0 An einem Punkt S befestigten Seil wurde eine nach allen Seiten gleichmäßig Licht abstrahlende Lampe so aufgehängt, dass die Lichtstrahlen im Schwerpunkt jeder Seitenfläche senkrecht auftreffen.

7 | 5.1 Zeigen Sie, dass der Punkt $M\left(\frac{175}{6}; \frac{35}{2}; \frac{22}{3}\right)$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABS ist, und zeigen Sie, dass der Aufhängepunkt P der als punktförmig angenommenen Lampe unterhalb der offenen Grundfläche OABC liegt.

Für den Ortsvektor des Schwerpunkts M des Dreiecks ABS gilt: $\overrightarrow{m} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{s}\right)$

$$\overrightarrow{m} = \tfrac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}35\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}35\\35\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}17{,}5\\17{,}5\\22\end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}87{,}5\\52{,}5\\22\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{175}{6}\\\frac{35}{2}\\\frac{22}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow M\left(\frac{175}{6};\frac{35}{2};\frac{22}{3}\right)$$

Das Seil an welchem die Lampe hängt wird beschrieben durch die Geradengleichung:

$$g:\vec{x} = \begin{pmatrix}17{,}5\\17{,}5\\22\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Das Licht soll senkrecht auf den Schwerpunkt M der Seitenfläche treffen; dieser Lichtstrahl wird beschrieben durch die Geradengleichung:

$$h:\vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{175}{6}\\\frac{35}{2}\\\frac{22}{3}\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}22\\0\\17{,}5\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden liefert die Position P der Lampe. Also:

$$g = h$$

$$\begin{pmatrix}17{,}5\\17{,}5\\22\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{175}{6}\\\frac{35}{2}\\\frac{22}{3}\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}22\\0\\17{,}5\end{pmatrix}$$

Man erhält nun folgendes Gleichungssystem (das recht einfach zu lösen ist):

$$17{,}5 = \tfrac{175}{6} + 22\mu \quad\Rightarrow\quad \mu = -\tfrac{35}{66}$$

$$17{,}5 = 17{,}5 \quad (w)$$

$$22 + \lambda = \tfrac{22}{3} - \tfrac{35}{66}\cdot\tfrac{22}{3} \quad\Rightarrow\quad \lambda = -\tfrac{167}{9}$$

Da das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist gibt es auch einen Schnittpunkt. Diesen erhält man, indem man $\lambda = -23\tfrac{125}{132}$ in die Geradengleichung g einsetzt:

$$g:\vec{x} = \begin{pmatrix}17{,}5\\17{,}5\\22\end{pmatrix} - 23\tfrac{125}{132}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17{,}5\\17{,}5\\-\frac{257}{132}\end{pmatrix} \Rightarrow P\left(17{,}5|7{,}5|-\tfrac{257}{132}\right)$$

Da die $x_3 -$Koordinate des Punktes P negativ ist ($x_3 = -\frac{257}{132} < 0$), liegt der Punkt P unterhalb der Grundfläche.

5 | 5.2 Die Position der Lampe kann für spezielle Lichteffekte durch Veränderung der Seillänge verändert werden. Berechnen sie den Abstand der Lampe von der Seitenkante OS, wenn die Lampe auf Höhe der $x_1, x_2 -$Ebene angebracht wird.

Für die Position der Lampe gilt: $L\left(17{,}5|17{,}5|0\right)$

Nun bildet man eine Hilfsebene F senkrecht zu $\overrightarrow{OS}$ durch den Punkt L:

$$F:\begin{pmatrix}17{,}5\\17{,}5\\0\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}17{,}5\\17{,}5\\22\end{pmatrix}\right) = 0$$

und setzt den allgemeinen Geradenpunkt der Geraden durch O und S: $\ell: \vec{x} = \kappa \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix}$

in die Ebene F ein:

$$\begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} \circ \left(\kappa \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$17,5 \cdot (17,5\kappa - 17,5) + 17,5 \cdot (17,5\kappa - 17,5) + 22 \cdot 22\kappa = 0$$

$$1096,5\kappa - 612,5 = 0$$

$$\kappa = \tfrac{1225}{2193}$$

Setzt man dieses nun in die Geradengleichung von ℓ ein, so erhält man den Schnittpunkt R.

$$\vec{x} = \tfrac{1225}{2193} \cdot \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{42875}{4386} \\ \frac{42875}{4386} \\ \frac{26950}{2193} \end{pmatrix} \Rightarrow R\left(\tfrac{42875}{4386} \middle| \tfrac{42875}{4386} \middle| \tfrac{26950}{2193} \right)$$

Für den Abstand d gilt dann:

$$d = \left|\overrightarrow{LR}\right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{42875}{4386} \\ \frac{42875}{4386} \\ \frac{26950}{2193} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{-33880}{4386} \\ \frac{-33880}{4386} \\ \frac{26950}{2193} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\tfrac{-33880}{4386}\right)^2 + \left(\tfrac{-33880}{4386}\right)^2 + \left(\tfrac{26950}{2193}\right)^2} \approx 16,44$$

Bemerkung: Es wäre auch in Ordnung anstatt mit den Brüchen mit gerundeten Dezimalbrüchen zu rechnen!

5 | 6 Vor der Pyramide steht ein senkrechter Fahnenmast, dessen Spitze F die Koordinaten $F(40; 30; 8)$ besitzt. Paralleles Sonnenlicht mit dem Richtungsvektor $\vec{l} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ erzeugt auf der Seitenfläche ABS der Pyramide den Schattenpunkt F_S der Spitze F. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes F_S.

Für den Sonnenstrahl gilt: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Nun bildet man $s \cap E$ (man setzt also s in E ein):

$$\begin{pmatrix}22\\0\\17{,}5\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}40\\30\\8\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}-2{,}5\\-3\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}35\\0\\0\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\begin{pmatrix}22\\0\\17{,}5\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}5\\30\\8\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}-2{,}5\\-3\\-2\end{pmatrix}\right)=0$$

$$22\cdot(5-2{,}5\tau)+17{,}5\cdot(8-2\tau)=0$$

$$-90\tau+250=0$$

$$\tau=\tfrac{25}{9}$$

eingesetzt in s: $\vec{x}=\begin{pmatrix}40\\30\\8\end{pmatrix}+\tfrac{25}{9}\cdot\begin{pmatrix}-2{,}5\\-3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{595}{18}\\\frac{65}{3}\\\frac{22}{9}\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;F_S\left(33\tfrac{1}{18}\middle|21\tfrac{2}{3}\middle|2\tfrac{4}{9}\right)$

$\overline{30}$