2010 B II Angabe

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung O sind die Punkte $A(1;0;-2)$, $B(-1;2;2)$ und $C_k(k;-k;-2-k)$ mit $k\in\mathbb{R}$ gegeben.
3	1.1	Untersuchen Sie, für welche Werte von k die drei Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC_k}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Sie bilden genau dann eine Basis des $\mathbb{R}^3$, wenn gilt: $\text{Det}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC_k}\right)\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & 2 & -k \\ -2 & 2 & -2-k \end{vmatrix} = 2(-2-k)-2k+4k+2k=-4+2k=0 \quad\Rightarrow\quad k=2$$

Die drei Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC_k}$ bilden somit für alle $k\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

4	1.2	Die Punkte O, A, B und C_k bilden jeweils ein Tetraeder. Berechnen Sie alle Werte von k, für die das Volumen des zugehörigen Tetraeders 1 VE beträgt.

Für das Volumen eines Tetraeders (dreiseitige Pyramide) welches von den Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC_k}$ aufgespannt wird gilt: $V_{\text{Tetraeder}}=\frac{1}{6}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC_k}\right)\right|$

Mit 1.1 erhält man:

$$\tfrac{1}{6}\cdot|2k-4|=1$$
$$|2k-4|=6$$
$$2k-4=-6 \qquad 2k-4=6$$
$$k_1=-1 \qquad k_2=5$$

4	1.3	Bestimmen Sie k so, dass der zugehörige Punkt C_k von den Punkten A und B gleich weit entfernt ist.

Es muss gelten:

$$\left|\overrightarrow{AC_k}\right|=\left|\overrightarrow{BC_k}\right|$$
$$\left|\begin{pmatrix} k-1 \\ -k \\ -k \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} k+1 \\ -k-2 \\ -k-4 \end{pmatrix}\right|$$
$$\sqrt{(k-1)^2+(-k)^2+(-k)^2}=\sqrt{(k+1)^2+(-k-2)^2+(-k-4)^2} \qquad |(\ldots)^2$$
$$k^2-2k+1+k^2+k^2=k^2+2k+1+k^2+4k+4+k^2+8k+16$$
$$3k^2-2k+1=3k^2+14k+21$$
$$-16k=20$$
$$k=-\tfrac{5}{4}$$

1.4.0 Die Punkte A und B legen die Gerade g fest, die Punkte C_k liegen auf der Geraden h.

5 1.4.1 Geben Sie für die beiden Geraden g und h jeweils eine Gleichung an und untersuchen Sie die gegenseitig Lage dieser beiden Geraden.

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} \qquad h:\vec{x}=\begin{pmatrix}k\\-k\\-2-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Betrachtet man die beiden Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}r=-2\\r=-2\\r=-4\end{matrix} \Rightarrow \text{Richtungsvektoren sind linear unabhängig}$$

Somit sind die beiden Geraden nicht parallel zueinander.
Nun setzt man beiden Geraden gleich.

$$g=h$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}k=1-2\lambda\\k=-2\lambda\\\end{cases}$$

Da man hier zwei verschieden Lösungen für k erhält haben die beiden Geraden keinen Schnittpunkt und sind daher zueinander windschief.

8 1.4.2 Stellen Sie eine Gleichung der Geraden i auf, die die beiden Geraden g und h jeweils senkrecht schneidet.

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} \qquad h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Den Richtungsvektor der Gerade i erhält man aus dem Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren der Geraden g und h.

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+4\\4-2\\2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_i=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Dieser Vektor steht schon mal senkrecht auf den beiden Geraden.

Nun bildet man eine Hilfsebene F welche durch die Gerade g und dem Vektor $\vec{u}_i$ gebildet wird.

$$F:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}+\eta\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt dieser Ebene F mit der Geraden h liefert einen Punkt, welcher dann als Aufpunkt (Stützvektor) der Geraden i verwendet werden kann.

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-4\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{n}_F=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow F:\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)=0$$

Nun die Gerade h einsetzen:

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\circ\left(k\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=0$$

$$-(k-1)-k+k=0$$

$$k=1$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

Somit folgt für die Gerade i:

$$i:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

2.0 Die Punkt A, B und C_k aus 1.0 legen für jeden Wert von k genau eine Ebene E_k fest.

2 2.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_k in Normalenform.

$\left[\text{Mögliches Ergebnis: } E_k: kx_1+(k-2)x_2+x_3-k+2=0\right]$

$A(1;0;-2)$, $B(-1;2;2)$ und $C_k(k;-k;-2-k)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC_k}=\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}k-1\\-k\\-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k+4k\\4(k-1)-2k\\2k-2(k-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2k\\2k-4\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}k\\k-2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{n}_{E_k}=\begin{pmatrix}k\\k-2\\1\end{pmatrix}$$

$$E_k:\begin{pmatrix}k\\k-2\\1\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)=0$$

4 2.2 Gegeben ist außerdem die Ebene $H: x_1-x_2-2x_3+19=0$

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes S, der sowohl auf der Ebene H als auch auf jeder Ebene E_k liegt.

Da der Punkt S in jeder Ebene E_k liegen soll, muss er auf der Geraden g liegen (denn diese Gerade enthält alle Punkte, die für jedes k auch in der Ebene E_k liegen).

Somit benötigt man lediglich den Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene H.
Dazu setzt man g in H ein:

$$1-2\lambda-2\lambda-2\left(-2+4\lambda\right)+19=0$$
$$1-2\lambda-2\lambda+4-8\lambda+19=0$$
$$-12\lambda=-24$$
$$\lambda=2$$

Und nun $\lambda=2$ in g eingesetzt:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad S\left(-3|4|6\right)$$

$\overline{30}$