2009 B I Lösung

1.1 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-1 \\ -0,5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-1 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1,5 \\ 3-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0$ oder $E: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} + 6 = 0$

1.2 $\vec{d}_k = \begin{pmatrix} 11+k \\ 6+k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.3 D_k in E einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 11+k \\ 6+k \\ k \end{pmatrix} + 6 = 0$$

$$11 + k - 2(6+k) + 2k + 6 = 0$$

$$k + 5 = 0$$

$$k = -5$$

$\vec{d}_{-5} = \begin{pmatrix} 11-5 \\ 6-5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow D_{-5}(6|1|-5)$

1.4 $$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 = 0 \quad \cdot 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3 = 0 \quad - \\ \hline -3x_2 + 6x_3 + 15 = 0 \end{array}$$

Wähle $x_3 = \lambda$

$-3x_2 + 6\lambda + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 5 + 2\lambda$

$x_1 - 2(5 + 2\lambda) + 2\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 + 2\lambda$

$$\Rightarrow \; s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.5 Lotgerade mit D_{-5} und $\vec{n}_E$

$$\ell : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ℓ in F einsetzen:

$$\begin{aligned} 2(6 + 2\tau) - (1 - \tau) - 2(-5 - 2\tau) - 3 &= 0 \\ 12 + 4\tau - 1 + \tau + 10 + 4\tau - 3 &= 0 \\ 9\tau &= -18 \\ \tau &= -2 \end{aligned}$$

in ℓ eingesetzt:

$$\vec{\ell} = \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L(2|3|-1)$$

Somit ist L Mittelpunkt der Strecke $\overline{DD^*}$; somit gilt:

$$\vec{\ell} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\vec{d} + \vec{d}^* \right) \quad \Rightarrow \quad \vec{d}^* = 2 \cdot \vec{\ell} - \vec{d}$$

$$\vec{d}^* = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^*(-2|5|3)$$

2.1 $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 9{,}5 &= t \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 &= 0 \\ t(x_1 + x_2) - 6x_3 + 3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= t - 9{,}5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -6 \\ tx_1 + tx_2 - 6x_3 &= -3 \end{aligned}$

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & t-9{,}5 & \\ 1 & -2 & 2 & -6 & \cdot 2 \\ t & t & -6 & -3 & \cdot 2 \\ \hline 2 & -1 & -2 & t-9{,}5 & \\ 0 & 3 & -6 & t+2{,}5 & \cdot t \\ 0 & -3t & (12-2t) & t^2-9{,}5t+6 & \\ \hline 2 & -1 & -2 & t-9{,}5 & \\ 0 & 3 & -6 & t+2{,}5 & \\ 0 & 0 & 12-8t & 2t^2-7t+6 & \end{array}\right.$$

Gilt $12 - 8t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 \neq 1{,}5$, so ist $\text{Rang}(A) = 3$: Somit hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

Gilt $12 - 8t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 1{,}5$, so ist $\text{Rang}(A) = 2$: Setzt man diesen Wert $(t_0 = 1{,}5)$ in die quadratische Gleichung ein, so folgt: $2 \cdot 1{,}5^2 - 7 \cdot 1{,}5 + 6 = 0$. Also ist auch $\text{Rang}(A_{erw}) = 2$: Somit hat das Gleichungssystem unendliche viele Lösungen.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist auch über Determinantenbetrachtungen lösbar.

$\text{Det}(A) = 24 - 2t - 2t - 4t - 4t - 6 = 18 - 12t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 1{,}5$

Somit hat obiges Gleichungssystem für $t_0 \neq 1{,}5$ eine eindeutige Lösung.

Da für mindestens eine Nebendeterminante für $t_0 = 1{,}5$ gilt: $\text{Det}(A_i) = 0$ mit $i \in \{1;2;3\}$, hat obiges Gleichungssystem für $t_0 = 1{,}5$ unendlich viele Lösungen.

2.2 Mit Hilfe von 2.1 und $t_0 = 1{,}5$ folgt:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Man wählt nun $x_3 = \lambda$ und erhält:

$$3x_2 - 6\lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \tfrac{4}{3} + 2\lambda$$

und damit dann:

$$2x_1 - \left(\tfrac{4}{3} + 2\lambda\right) - 2\lambda = -8 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\tfrac{10}{3} + 2\lambda$$

Letztendlich folgt für die Schnittgerade:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$