2008 B I –Lösung

1.1
$$\text{Det}\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC_k}\right) = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 2+k \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -10+10+4\cdot(2+k)-10 = 4k-2 \neq 0$$

$\Rightarrow \quad k \neq \frac{1}{2}$

1.2 $E_k : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC_k}$

$$E_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} k-3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da die beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC_k}$ offensichtlich linear unabhängig sind $\left(\overrightarrow{AB} \neq \tau \cdot \overrightarrow{AC_k}\right)$ ist die Ebene E_k für alle $k \in \mathbb{R}$ eindeutig festgelegt.

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k-3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 4(k-3)+10 \\ -10-2(k-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4k-2 \\ -2k-4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{E_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix}$$

Oder auch so: Da $\vec{n}_{E_k} \neq \vec{0}$, ist die Ebene E_k eindeutig festgelegt.

$$E_k : \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$E_k : x_1 + (1-2k)x_2 + (2+k)x_3 - 1 + 2k = 0$$

1.3 Parallelität zur x_1 – Achse $\left(\Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \circ \vec{e}_1 = 0\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad E_k \text{ ist nie parallel zur } x_1 - \text{Achse}$$

Parallelität zur x_2 – Achse $\left(\Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \circ \vec{e}_2 = 0\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1-2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad E_{\frac{1}{2}} \text{ ist parallel zur } x_2 - \text{Achse}$$

$E_{\frac{1}{2}} : x_1 + 2{,}5x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Koordinatenursprung $(0|0|0) \in E_{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \quad x_2$ – Achse ist in der Ebene $E_{\frac{1}{2}}$ enthalten.

Parallelität zur $x_3-\text{Achse}$ $\left(\Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \circ \vec{e}_3 = 0\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2+k = 0 \quad \Rightarrow \quad k=-2 \quad \Rightarrow \quad E_2 \text{ ist parallel zur } x_3-\text{Achse}$$

$E_2: x_1 - 3x_2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Koordinatenursprung $(0|0|0) \notin E_2$

$\Rightarrow \quad x_3-$Achse ist echt parallel zur Ebene E_2.

Da E_k für kein $k \in \mathbb{R}$ parallel zu zwei Koordinatenachsen ist, ist E_k auch nie parallel zu einer Koordinatenebene.

1.4 Schnitt mit der $x_1-\text{Achse}: \; x_2 = x_3 = 0$

$x_1 - 1 + 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1-2k \quad \Rightarrow \quad A_1(1-2k\,|\,0\,|\,0)$

Schnitt mit der $x_2-\text{Achse}: \; x_1 = x_3 = 0$

$$(1-2k)x_2 - 1 + 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1-2k}{1-2k} = 1 \quad \left(k \neq \tfrac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad A_2(0\,|\,1\,|\,0)$$

Schnitt mit der $x_3-\text{Achse}: \; x_1 = x_2 = 0$

$$(k+2)x_3 - 1 + 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1-2k}{k+2} \quad (k \neq -2) \quad \Rightarrow \quad A_3\left(0\,|\,0\,|\,\tfrac{1-2k}{k+2}\right)$$

Damit alle vom Koordinatenursprung gleich weit entfernt sind muss gelten:
$\left|\overrightarrow{OA_1}\right| = \left|\overrightarrow{OA_2}\right| = \left|\overrightarrow{OA_3}\right| = 1$

Also: $\left|\overrightarrow{OA_1}\right| = |1-2k| = 1 \quad \Rightarrow \quad 1-2k = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{OA_3}\right| = \frac{1}{2} \neq 1 \\ k_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{OA_3}\right| = \frac{1}{3} \neq 1 \end{cases}$

Somit gibt es kein $k \in \mathbb{R}$, so dass alle drei Achsenabschnitte gleich weit vom Koordinatenursprung entfernt sind.

Hinweis: Die Aufgabe 1.3 und 1.4 hätte man auch zusammen lösen können. Man bestimmt zuerst die Achsenabschnitte in Abhängigkeit von k und folgert dann für die Sonderfälle $k = \frac{1}{2}$ und $k = -2$ auf die Lage der entsprechenden Achse zur Ebene E_k.

2.1 $\begin{array}{rcrcrcrcr} E_1: & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 1 & = 0 \\ E_2: & x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 3 & = 0 \\ \hline & & & 2x_2 & - & x_3 & - & 2 & = 0 \end{array}$

Wähle $x_3 = \lambda$, dann folgt:

$2x_2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 + \frac{1}{2}\lambda$

$x_1 - \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right) + 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -2{,}5\lambda$

Nun folgt für die Schnittgerade g:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2{,}5\lambda \\ 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den Schnittwinkel der beiden Ebenen gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+1+9} \cdot \sqrt{1+9+16}} = \frac{16}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{26}} = 0{,}946... \Rightarrow \alpha = 18{,}9°$$

Bemerkung: Da die Ebenen E_1 und E_2 aus den Ebenen E_k entstehen (für $k = 1$ bzw. $k = 2$) liegen die Punkte A und B sowohl auf der Ebene E_1 als auch auf der Ebene E_2. Die Schnittmenge der beiden Ebenen E_1 und E_2 enthält somit die beiden Punkte A und B. Diese bilden dann die Schnittgerade $g_S = g(A, B)$.

2.2 Für die Ebene F gilt:

$$F: \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0 \Rightarrow F: -2{,}5x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 0$$

g in F einsetzen:

$-2{,}5 \cdot (-2{,}5\lambda) + 0{,}5 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right) + \lambda = 0 \Rightarrow 6{,}25\lambda + 0{,}5 + \frac{1}{4}\lambda + \lambda = 0 \Rightarrow 7{,}5\lambda = -0{,}5$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{15}$ in g einsetzen

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{29}{30} \\ -\frac{1}{15} \end{pmatrix} \Rightarrow S\left(\frac{1}{6} \,\middle|\, \frac{29}{30} \,\middle|\, -\frac{1}{15}\right)$$