

2008 B II

- BE** 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 sind die Gerade
- $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} \text{ und die Ebene } E: x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 = 0 \text{ gegeben.}$$
- 2 1.1 Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Ebene E liegt.
- 3 1.2 Die Ebene F steht senkrecht auf der Ebene E . Die Ebenen E und F schneiden sich in der Geraden g . Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F in Normalenform.
- 1.3.0 Gegeben sind zusätzlich die Punkte $A(1; 1; 2)$ und $B(3; b_2; b_3)$ auf der Geraden g sowie der Punkt $C(3; -2; -2)$, der nicht auf der Geraden g , aber in der Ebene E liegt, und der Punkt $R(2; r_2; 4)$ mit $b_2, b_3, r_2 \in \mathbb{R}$.
- 2 1.3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten b_2 und b_3 .
- 6 1.3.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und den Abstand des Punktes C von der Geraden g .
- 8 1.3.3 Das Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze R . Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide in Abhängigkeit von r_2 und berechnen Sie r_2 so, dass die Höhe dieser Pyramide $\sqrt{6}$ LE beträgt.
- 2.0 Beim Druck mit einem Farbdrucker werden die Farbinformationen des Bildschirms, die im RGB-Farbmodell vorliegen, in eine geräteabhängige Form umgewandelt. Die Druckergrundfarben werden mit U, V und W bezeichnet. Die Umwandlung vom RGB-Modell in das UVW-Modell wird durch folgende Gleichung beschrieben:
- $$M \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit } M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & -0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{b} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$$
- 2 2.1 Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar ist.
- 4 2.2 Berechnen Sie für $R = 100, G = 0$ und $B = 1$ den Farbwert V und ermitteln Sie umgekehrt, welcher Farbwert B für die Druckausgabe $U = 0, V = 4$ und $W = 2$ notwendig ist.
- 3 2.3 Durch einen Fehler in einem Druckertreiber wird anstelle der zweiten Zeile der in 2.0 gegebenen Matrix M nochmals die erste Zeile verwendet. Erläutern Sie die Konsequenzen für die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems.