

**2008 B II**

- BE** 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Gerade
- $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} \text{ und die Ebene } E: x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 = 0 \text{ gegeben.}$$
- 2 1.1 Zeigen Sie, dass die Gerade  $g$  in der Ebene  $E$  liegt.
- 3 1.2 Die Ebene  $F$  steht senkrecht auf der Ebene  $E$ . Die Ebenen  $E$  und  $F$  schneiden sich in der Geraden  $g$ . Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene  $F$  in Normalenform.
- 1.3.0 Gegeben sind zusätzlich die Punkte  $A(1; 1; 2)$  und  $B(3; b_2; b_3)$  auf der Geraden  $g$  sowie der Punkt  $C(3; -2; -2)$ , der nicht auf der Geraden  $g$ , aber in der Ebene  $E$  liegt, und der Punkt  $R(2; r_2; 4)$  mit  $b_2, b_3, r_2 \in \mathbb{R}$ .
- 2 1.3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten  $b_2$  und  $b_3$ .
- 6 1.3.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  und den Abstand des Punktes  $C$  von der Geraden  $g$ .
- 8 1.3.3 Das Dreieck  $ABC$  ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze  $R$ . Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide in Abhängigkeit von  $r_2$  und berechnen Sie  $r_2$  so, dass die Höhe dieser Pyramide  $\sqrt{6}$  LE beträgt.
- 2.0 Beim Druck mit einem Farbdrucker werden die Farbinformationen des Bildschirms, die im RGB-Farbmodell vorliegen, in eine geräteabhängige Form umgewandelt. Die Druckergrundfarben werden mit  $U$ ,  $V$  und  $W$  bezeichnet. Die Umwandlung vom RGB-Modell in das UVW-Modell wird durch folgende Gleichung beschrieben:
- $$M \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit } M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & -0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$$
- 2 2.1 Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem  $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$  eindeutig lösbar ist.
- 4 2.2 Berechnen Sie für  $R = 100$ ,  $G = 0$  und  $B = 1$  den Farbwert  $V$  und ermitteln Sie umgekehrt, welcher Farbwert  $B$  für die Druckausgabe  $U = 0$ ,  $V = 4$  und  $W = 2$  notwendig ist.
- 3 2.3 Durch einen Fehler in einem Druckertreiber wird anstelle der zweiten Zeile der in 2.0 gegebenen Matrix  $M$  nochmals die erste Zeile verwendet. Erläutern Sie die Konsequenzen für die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems.