2007 B I Lösung

BE		

BE 1.0 Für ein Bergwerk wird in einem mathematischen Modell ein kartesisches Koordinatensystem angelegt, so dass die Erdoberfläche durch die x_1, x_2-Ebene beschrieben wird. Negative x_3-Koordinaten geben die entsprechende Tiefe unter der Erdoberfläche an. Stollen des Bergwerks werden im Modell durch Geradenstücke beschrieben, der Querschnitt bleibt außer Betracht. Für die Einheiten auf den drei Koordinatenachsen gilt jeweils: 1 LE = 1 m. Auf die Verwendung der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

Der Stollen s_1 wird beschrieben durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit reellem Parameter λ, für den gilt $-5 \leq \lambda \leq 50$. Ein zweiter Stollen s_2 verläuft längs der Geraden mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ -52 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit reellem Parameter μ.

4 1.1 Berechnen Sie die Länge des Stollens s_1.

Das eine Ende des Stollens erhält man für $\lambda_1 = -5$, das andere Ende für $\lambda_2 = 50$.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ -60 \\ -95 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1(-60|-60|-95)$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} + 50 \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ -150 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(600|600|-150)$$

Dann erhält man für die Länge des Stollens s_1.

$$\ell = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 600-(-60) \\ 600-(-60) \\ -150-(-95) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 660 \\ 660 \\ -55 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{660^2 + 660^2 + (-55)^2} = \sqrt{874225} = 935$$

5 1.2 Prüfen Sie, ob die beiden Stollen zueinander windschief verlaufen.

Zunächst untersucht man die beiden Richtungsvektoren

$$\left.\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \Rightarrow \quad k = 12 \\ \Rightarrow \quad k = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{u}_{s_1} \neq k \cdot \vec{u}_{s_2}$$

Die beiden Richtungsvektoren verlaufen somit nicht parallel, die beiden Geraden verlaufen somit nicht parallel.

Nun setzt man die beiden Geradengleichungen gleich und erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 12\lambda &= -9+23\mu \\ 12\lambda &= 13+\mu \qquad\qquad \Rightarrow\; 12\lambda = 13+1 \;\Rightarrow\; \lambda = \tfrac{7}{6} \\ -100-\lambda &= -52-\mu \qquad\qquad \Rightarrow\; -100-\tfrac{7}{6} = -52-1 \;\Rightarrow\; -101\tfrac{1}{6} = -53 \;\; (\mathrm{f}) \\ \hline 0 &= -22+22\mu \;\Rightarrow\; \mu = 1 \end{aligned}$$

Setzt man die beiden Werte für λ und μ in die letzte Gleichung (III) ein, so ergibt sich hier ein falsche Aussage. Somit folgt, dass die beiden Geraden keinen Schnittpunkt haben. Sie sind somit windschief.

4 | 1.3 Zeigen Sie, dass die Strecke [AB] mit A(14; 14; –53) und B(12; 12; –101) eine direkte Verbindung zwischen den Stollen s_1 und s_2 herstellt und zu beiden senkrecht verläuft.

Zunächst zeigt man, dass einer der beiden Punkte auf der einen Geraden und der andere Punkt auf der anderen Geraden liegt.

$$s_2: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ -101 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \Rightarrow & \lambda = 1 \\ \Rightarrow & \lambda = 1 \\ \Rightarrow & \lambda = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \in s_2$$

$$s_1: \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ -52 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -53 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \Rightarrow & \mu = 1 \\ \Rightarrow & \mu = 1 \\ \Rightarrow & \mu = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B \in s_1$$

Somit stellt die Strecke [AB] eine direkte Verbindung zwischen den Stollen s_1 und s_2 her. (Das es dann auch die kürzeste ist, ist damit noch nicht ausgesagt!)

Zu zeigen bleibt: $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{s_1}$ und $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{s_2}$

$$\overrightarrow{AB} \circ \vec{u}_{s_1} = \begin{pmatrix} 12-14 \\ 12-14 \\ -101-(-53) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -48 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot (23) + (-2) \cdot 1 + (-48) \cdot (-1) = 0$$

$\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{s_1}$

$$\overrightarrow{AB} \circ \vec{u}_{s_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -48 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot (12) + (-2) \cdot 12 + (-48) \cdot (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{s_2}$$

(Somit ist die Verbindung auch die kürzeste!)

4 | 1.4 Der Bau eines Stollens vom Punkt A zum Punkt B aus der Aufgabe 1.3 wird durch eine harte Gesteinsschicht, die durch die Ebenengleichung $10x_1 + 10x_2 - x_3 - 337 = 0$ beschrieben werden kann, behindert. Berechnen Sie, in welcher Tiefe unter der Erdoberfläche das Bohrteam auf diese Gesteinsschicht trifft.

Für die Verbindungsgerade zwischen den beiden Stollen gilt:

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \kappa \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -101 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -48 \end{pmatrix}$$

Nun eingesetzt in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} 10 \cdot (12 - 2\kappa) + 10 \cdot (12 - 2\kappa) - (-101 - 48\kappa) - 337 &= 0 \\ 120 - 20\kappa + 120 - 20\kappa + 101 + 48\kappa - 337 &= 0 \\ 4 + 8\kappa &= 0 \\ \kappa &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Somit erhält man den Schnittpunkt S der Geraden h mit der Ebene:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -101 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ -77 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(13|13|-77)$$

Da die x_3 – Koordinate des Punktes S den Wert $x_3 = -77$ hat beträgt dies Tiefe unter der Erdoberfläche 77m.

2.0 Gegeben sind die Ebenen
E: $x_1 + x_2 - 3 = 0$, F: $-2x_1 + x_3 - 1 = 0$ und $G_a: 2x_2 + x_3 + a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$.

4 2.1 Geben Sie an, welche besondere Lage jede dieser Ebenen bezüglich des Koordinatensystems hat.

Da gilt:

$$\vec{n}_E \circ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 - \text{Achse} \parallel E$$

$$\vec{n}_f \circ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 - \text{Achse} \parallel F$$

$$\vec{n}_{G_a} \circ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - \text{Achse} \parallel G_a \qquad \text{für } a \neq 0$$

Falls $a = 0$ ist die $x_1 -$Achse sogar in der Ebene G_0 enthalten.
(Alle Punkte der $x_1 -$Achse haben die Form $P(x_1|0|0)$ und erfüllen die Ebenengleichung von G_0)

2 2.2 Zeigen Sie, dass die drei Normalenvektoren der Ebenen E, F und G linear abhängig sind.

$$\lambda \cdot \vec{n}_E + \mu \cdot \vec{n}_F + \tau \cdot \vec{n}_{G_a} = \vec{0}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{rrrrrrl}
\lambda & - & 2\mu & & & = 0 & \\
\lambda & & & + & 2\tau & = 0 & - \\
 & & \mu & + & \tau & = 0 & \cdot 2 \quad + \\
\hline
 & - & 2\mu & - & 2\tau & = 0 & \\
 & & & & 0 & = 0 & (w)
\end{array}$$

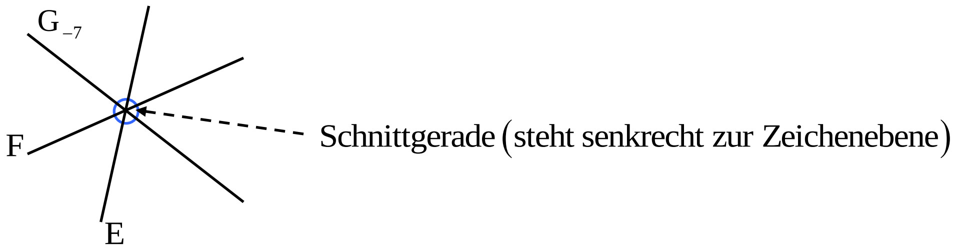
Das Gleichungssystem hat somit unendlich viele Lösungen, die Normalenvektoren sind somit linear abhängig.

7 2.3 Bestimmen Sie jeweils die Werte von a, für die die Schnittmenge $E \cap F \cap G_a$ leer bzw. nicht leer ist. Geben Sie für diese beiden Fälle die gegenseitige Lage der drei Ebenen jeweils in einer Skizze an.

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
x_1 & + & x_2 & & & -3 & = 0 & \cdot 2 \quad + \\
-2x_1 & & & + & x_3 & -1 & = 0 & \\
 & & 2x_2 & + & x_3 & +a & = 0 & - \\
\hline
 & & 2x_2 & + & x_3 & -7 & = 0 & \\
 & & & & & a+7 & = 0 &
\end{array}$$

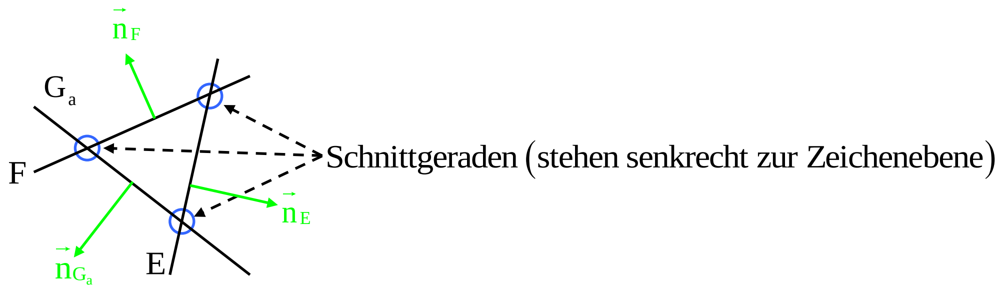
Für $a = -7$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen es lässt sich eine Unbekannte frei wählen (z.Bsp. $x_3 = \eta$) und berechnet die Lösungen für die anderen Unbekannte. Man erhält somit eine Schnittgerade.

Skizze der gegenseitigen Lage:



Für $a \neq -7$ führt obiges Gleichungssystem zu einer falschen Aussage und ist daher nicht lösbar. Da aber nach 2.2 die Normalenvektoren der drei Ebenen linear abhängig sind müssen diese in einer gemeinsamen Ebene liegen. Die drei Ebenen schneiden sich daher paarweise (→ Schnittgerade). Daher gibt es drei Schnittgeraden, welche zueinander alle parallel sind.

Skizze der gegenseitigen Lage:



30