2007 B II Lösung

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind der Punkt $A(0;1;2)$ und die Punktmenge $B_k(1;2k;3k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.
2	1.1	Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{R}$ die Punkte B_k auf einer Geraden g liegen und geben Sie die Gleichung dieser Geraden g an.

$$\vec{b}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2k \\ 3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4	1.2	Ermitteln Sie, welcher der Punkte B_k dem Punkt A am nächsten liegt.

$$\overrightarrow{AB_k} \circ \overrightarrow{u_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2k-1 \\ 3k-2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4k-2+9k-6 = 13k-8 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \tfrac{8}{13}$$

$B_{\frac{8}{13}}\left(1; \tfrac{16}{13}; \tfrac{24}{13}\right)$ liegt dem Punkt A am nächsten.

3	1.3	Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform, in der der Punkt A und alle Punkte B_k liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \overrightarrow{n_E} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$E: x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 1 = 0$$

	2.0	Gegeben ist nun zusätzlich die Ebene $F: x_2 + x_3 - 4 = 0$.
6	2.1	Die Ebenen E (Aufgabe 1.3) und F schneiden sich in der Geraden s. Berechnen Sie den Schnittwinkel α der beiden Ebenen und eine Gleichung der Schnittgeraden s.

[Mögliches Teilergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$]

6 2.2 Geben Sie die Lotgerade auf die Ebene F durch den Punkt A(0; 1; 2) an und ermitteln Sie mit ihrer Hilfe den Abstand des Punktes A von der Ebene F.

3.0 Gegeben sind nun zusätzlich die Ebenen $H_a: x_1 + ax_2 - x_3 - 2 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$.

2 3.1 Zeigen Sie, dass unabhängig von a jede Ebene H_a weder zur Ebene E (Aufgabe 1.3) noch zur Ebene F (siehe 2.0) parallel ist.

4 3.2 Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Schnittmenge $E \cap F \cap H_a$ leer ist und verdeutlichen Sie anhand einer Skizze die gegenseitige Lage der drei Ebenen.

3 3.3 Setzen Sie a = 2 und bestimmen Sie die Schnittmenge $E \cap F \cap H_2$.

30