2006 B II Lösung

BE

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A(1; 3; –1), P(4; –3; 5) und $M(m_1; 1; m_3)$ gegeben, wobei $m_1, m_3 \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass der Punkt M auf der Geraden AP liegt.

4 1.1 Stellen Sie eine Gleichung der durch die Punkte A und P festgelegten Geraden p auf und bestimmen Sie die Parameter m_1 und m_3.

Gerade durch A und P: $p: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \sigma\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4-1 \\ -3-3 \\ 5-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$p: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda = 3 \cdot \sigma$

P in p: $\begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \lambda = 1 \quad \begin{matrix} \Rightarrow m_1 = 2 \\ \\ \Rightarrow m_3 = 1 \end{matrix}$

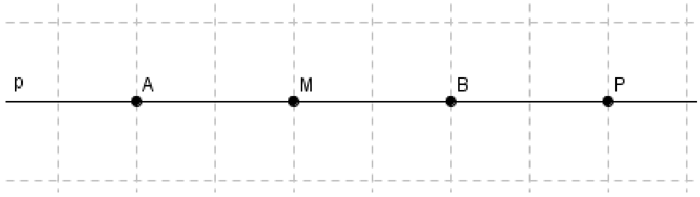
$\Rightarrow M(2;1;1)$

5 1.2 M sei der Mittelpunkt einer Strecke [AB].
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B, ermitteln Sie, ob der Punkt P innerhalb oder außerhalb der Strecke [AB] liegt und fertigen Sie eine Skizze an, in der die gegenseitige Lage der Punkte A, B und P zu erkennen ist.
[Teilergebnis: B(3; –1; 3)]

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-3 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B(3;-1;3)$

$\overrightarrow{AP} = \tau \cdot \overrightarrow{PB} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \tau \cdot \begin{pmatrix} 3-4 \\ -1-(-3) \\ 3-5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \tau \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \tau = -3 \\ \Rightarrow \tau = -3 \\ \Rightarrow \tau = -3 \end{matrix}$

Somit ist P äußerer Teilpunkt.



2.0 Gegeben ist ferner die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$.

8 2.1 Der Punkt C liegt auf der Geraden g und bildet zusammen mit den Punkten A und B ein gleichschenkliges Dreieck mit der Strecke [AB] als Basis.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C und den Abstand des Punktes C von der Geraden AB.
[Teilergebnis: C(–6; 5; 9)]

Es muss gelten: $\overrightarrow{MC} \circ \overrightarrow{AB} = 0 \quad \left(\text{da } \overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{AB}\right)$

$$\overrightarrow{MC} \circ \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 3-1 \\ -1-3 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-5\mu \\ -4+4\mu \\ 4+2\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$2(2-5\mu) - 4(-4+4\mu) + 4(4+2\mu) = 0$$

$$4 - 10\mu + 16 - 16\mu + 16 + 8\mu = 0$$

$$-18\mu + 36 = 0$$

$$\mu = 2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow C(-6;5;9)$$

$$d(C;p) = \left|\overrightarrow{MC}\right| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{144} = 12$$

5 2.2 Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC.

3 2.3 Die Gerade g und der Punkt A bestimmen eine Ebene E.
Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform auf.

[mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 = 0$]

3	2.4	Bestimmen Sie eine Gleichung der Lotgeraden k zur Ebene E durch den Punkt A und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte K_1 und K_2 dieser Lotgeraden, die von der Ebene E den Abstand 3 LE besitzen.
2	2.5	Berechnen Sie das Volumen der Pyramide mit dem Dreieck ABC als Grundfläche und dem Punkt K_1 als Spitze.
30		