2005 B I Lösung

BE		
	1.0	Im kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Geradenschar g_k mit $k \in \mathbb{R}$ sowie die Gerade h gegeben:

$$g_k: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} k-4 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}, \ \sigma \in \mathbb{R}; \qquad h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \tau \in \mathbb{R}.$$

9 1.1 Ermitteln Sie die gegenseitige Lage der Geraden g_k und h in Abhängigkeit von k.

Zunächst muss man die beiden Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit untersuchen:

$$\begin{pmatrix} k-4 \\ k \\ 3 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -9 \quad (f) \\ k = 3 \\ \mu = -3 \end{cases}$$

Da das Gleichungssystem nicht lösbar ist sind die beiden Richtungsvektoren linear unabhängig. Die beiden Geraden sind somit nicht parallel.
Um nun zu untersuchen ob die Geraden sich schneiden oder zueinander windschief sind setzt man die beiden Geraden gleich: $g = h$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} k-4 \\ k \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1) & k\sigma - 4\sigma = 3 + 3\tau \\ (2) & k\sigma = -1 - \tau \\ (3) & 3\sigma = -3 - \tau \quad \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (5) & -4\sigma = 4 + 4\tau \\ (6) & 8\sigma = -8 \Rightarrow \sigma = -1 \quad \text{in } (4) \\ & 4 = 4 + 4\tau \Rightarrow \tau = 0 \quad \text{in } (2) \\ & -k = -1 \Rightarrow k = 1 \end{array}$$

Für $k = 1$ haben die beiden Geraden g_1 und h einen Schnittpunkt, für $k \neq 1$ sind die Gerade windschief zueinander.

4 1.2 Berechnen Sie den Schnittpunkt P der Geraden g_1 (für k = 1) und der Geraden h sowie deren Schnittwinkel.
[Teilergebnis: P(1; 1; –2)]

Mit $\tau = 0$ folgt für den Schnittpunkt der Geraden g_1 und h:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P(1|1|-2)$$

Für den Schnittwinkel gilt:

$$\cos\rho = \frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}\right|} = \left|\frac{-9-1-3}{\sqrt{(-3)^2+1^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{-13}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{11}}\right| \Rightarrow \rho = 25{,}9°$$

4 | 1.3 Bestimmen Sie den Punkt L der Geraden g_1, der dem Ursprung am nächsten liegt.

Nun bildet man eine Hilfsebene F welche den Koordinatenursprung enthält und senkrecht zur Geraden g_1 verläuft. (Der Richtungsvektor der Geraden g_1 ist dabei Normalenvektor)

$$F: \begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\vec{0}\right)=0$$

Nun die Gerade g_1 einsetzen:

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}\right)=0$$

$$-3(-2-3\sigma)+(2+\sigma)+3(1+3\sigma)=0$$

$$6+9\sigma+2+\sigma+3+9\sigma=0$$

$$19\sigma=-11 \quad\Rightarrow\quad \sigma=-\tfrac{11}{19}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}-\tfrac{11}{19}\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{19}\\\frac{27}{19}\\-\frac{14}{19}\end{pmatrix}=\overrightarrow{OL} \quad\Rightarrow\quad L\left(-\tfrac{5}{19}\middle|\tfrac{27}{19}\middle|-\tfrac{14}{19}\right)$$

2.0 Zusätzlich ist nun für $a \in \mathbb{R}$ eine Ebenenschar E_a in Koordinatenform gegeben:
$E_a:\ (4-a)\cdot x_1 + a\cdot x_2 - 4 = 0$.

3 | 2.1 Beschreiben und begründen Sie die besondere Lage <u>aller</u> Ebenen E_a im Koordinatensystem.

Zunächst setzt man den Koordinatenursprung $O(0|0|0)$ in E_a ein:

$$(4-a)\cdot 0 + a\cdot 0 - 4 \overset{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad -4=0 \quad (f)$$

Somit liegt der Koordinatenursprung in keiner der Ebenen E_a.

Da die x_3-Koordinate fehlt folgt wegen $\vec{n}_{E_a}\circ\vec{e}_3=\begin{pmatrix}4-a\\a\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0$, dass gilt: $\vec{n}_{E_a}\perp\vec{e}_3$

Somit verlaufen alle Ebenen E_a parallel zur x_3-Achse.

2 2.2 Zeigen Sie, dass der Punkt P aus Aufgabe 1.2 in allen Ebenen E_a liegt.

Dazu setzt man $P(1|1|-2)$ in E_a ein: $E_a:(4-a)\cdot 1+a\cdot 1-4=0 \;\Rightarrow\; 0=0 \;\;(w)$
Somit liegt der Punkt P in jeder Ebene E_a.

4 2.3 Bestimmen Sie den Wert für a, für den die zugehörige Ebene E_a senkrecht zu der Ebene steht, in der die Geraden g_1 und h liegen.

Für den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene die durch g_1 und h verläuft gilt:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3\\9-3\\3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

Damit die beiden Ebenen nun aufeinander senkrecht stehen müssen deren beiden Normalenvektoren aufeinander senkrecht stehen.

$$\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4-a\\a\\0\end{pmatrix}=4-a+3a=4+2a=0 \;\Rightarrow\; a=-2$$

4 2.4 Zeigen Sie, dass sich alle Ebenen E_a in einer von a unabhängigen Geraden s schneiden und geben Sie eine Gleichung dieser Geraden s an.

Nach Aufgabe 2.1 verlaufen alle Ebenen parallel zur x_3-Achse, somit muss die Schnittgerade s aller Ebenen E_a auch parallel zur x_3-Achse sein. Dann folgt für den Richtungsvektor der Geraden s: $\vec{u}_s=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Nach Aufgabe 2.2 liegt aber auch der Punkt P in allen Ebenen E_a und daher auch auf der Schnittgeraden s.
Somit folgt für die Schnittgerade s:

$$s:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

30