2005 B II Lösung

BE

1.0 Im dreidimensionalen Vektorraum V^3 sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix},\ \vec{c}_k=\begin{pmatrix}k\\2\\1\end{pmatrix} \text{ und } \vec{d}=\begin{pmatrix}6\\-2\\1\end{pmatrix}, \text{ wobei } k\in\mathbb{R}.$$

3 1.1 Berechnen Sie, für welche Werte des Parameters k die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_k$ keine Basis des dreidimensionalen Vektorraumes V^3 bilden.

Damit die drei Vektoren keine Basis bilden muss gelten: $\operatorname{Det}\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}_k\right)=0$

$$\begin{vmatrix}3&3&k\\0&2&2\\1&2&1\end{vmatrix}=6+6-2k-12=-2k=0 \quad\Rightarrow\quad k=0$$

Für $k=0$ bilden die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}_0$ keine Basis des Vektorraums V^3.

3 1.2 Setzen Sie k = 0 und überprüfen Sie, ob sich der Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_0$ darstellen lässt.

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcll}
3\lambda+3\mu & = & 6 & \\
2\mu+2\eta & = & -2 & \\
\lambda+2\mu+\eta & = & 1 & \cdot 3 \quad - \\
\hline
-3\mu-3\eta & = & 3 & \cdot 2 \\
2\mu+2\eta & = & -2 & \cdot 3 \quad + \\
\hline
0 & = & 0 & (w)
\end{array}$$

Das Gleichungssystem führt zu einer wahren Aussage. Somit besitzt es unendlich viele Lösungen und somit gibt es auch unendliche viele Möglichkeiten den Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_0$ darzustellen.

2 1.3 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die den Punkt P (1; –1; 1) enthält und von den Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt wird, in Koordinatenform.
[Mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 7 = 0$]

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\6\end{pmatrix} = \vec{n}_E \quad\Rightarrow\quad E: \begin{pmatrix}-2\\-3\\6\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)=0$$

$$E: -2\left(x_1-1\right)-3\left(x_2+1\right)+6\left(x_3-1\right)=0$$

$$E: -2x_1+2-3x_2-3+6x_3-6=0$$

$$E: -2x_1-3x_2+6x_3-7=0$$

5 1.4 Die Ebene E schneidet die drei Koordinatenachsen in den Punkten X_1, X_2 und X_3.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide mit dem Dreieck $X_1X_2X_3$ als Grundfläche und dem Koordinatenursprung als Spitze.

Schnittpunkt mit der x_1 – Achse: $x_2 = x_3 = 0$

$$-2x_1-7=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-3{,}5 \quad\Rightarrow\quad X_1\left(-3{,}5|0|0\right)$$

Schnittpunkt mit der x_2 – Achse: $x_1 = x_3 = 0$

$$E: -3x_2-7=0 \quad\Rightarrow\quad x_2=-\tfrac{7}{3} \quad\Rightarrow\quad X_2\left(0|-\tfrac{7}{3}|0\right)$$

Schnittpunkt mit der x_3 – Achse: $x_1 = x_2 = 0$

$$E: 6x_3-7=0 \quad\Rightarrow\quad x_3=\tfrac{7}{6} \quad\Rightarrow\quad X_3\left(0|0|\tfrac{7}{6}\right)$$

Für das Volumen einer dreiseitigen Pyramide gilt:

$$V=\tfrac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{OX_1}\times\overrightarrow{OX_2}\right)\circ\overrightarrow{OX_3}\right|=\tfrac{1}{6}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{OX_1},\overrightarrow{OX_2},\overrightarrow{OX_3}\right)\right|$$

$$V=\tfrac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-3{,}5 & 0 & 0\\ 0 & -\tfrac{7}{3} & 0\\ 0 & 0 & \tfrac{7}{6}\end{vmatrix}=\left|\tfrac{1}{6}\cdot\left(-3{,}5\right)\cdot\left(-\tfrac{7}{3}\right)\cdot\tfrac{7}{6}\right|=\tfrac{343}{216}\approx 1{,}588$$

2.0 Gegeben ist nun zusätzlich die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

5 2.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden h mit der Ebene E aus Teilaufgabe 1.3 sowie den Schnittwinkel zwischen h und E.

[Teilergebnis: S (1; −1; 1)]

Man setzt zunächst h in E ein:

$$-2(21+10\lambda)-3(7+4\lambda)+6(-21-11\lambda)-7=0$$
$$-42-20\lambda-21-12\lambda-126-66\lambda-7=0$$
$$-98\lambda=196$$
$$\lambda=-2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(1|-1|1)$$

Um den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E zu ermitteln benötig man zuerst den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und dem Normalenvektor der Ebene E.

$$\cos\rho = \left| \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}\right|} \right| = \left| \frac{-20-12-66}{\sqrt{100+16+121} \cdot \sqrt{4+9+36}} \right| = \left| \frac{-98}{\sqrt{237} \cdot \sqrt{49}} \right| = \frac{98}{7 \cdot \sqrt{237}}$$

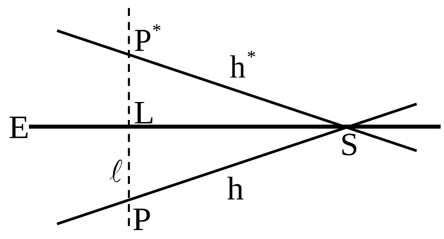
$$\Rightarrow \quad \rho = 24{,}58°$$

Dann folgt für den Schnittwinkel α zwischen der Geraden g und der Ebene E:

$$\alpha = 90° - 24{,}58° = 65{,}42°$$

7 2.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h^*, die durch Spiegelung der Geraden h an der Ebene E entsteht.

Der Stützvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix}$ der Geraden h liefert den Punkt $P(21|7|-21)$ auf der Geraden h. Dieser liegt nicht auf der Ebenen E (da ja S der Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene E ist).



Nun bildet man die Lotgerade ℓ (mit dem Richtungsvektor $\vec{n}_E$) und dem Punkt P (Stützvektor $\overrightarrow{OP}$).

$$\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nun schneidet man die Lotgerade ℓ mit der Ebene E:

$$-2(21-2\tau)-3(7-3\tau)+6(-21+6\tau)-7=0$$
$$-42+4\tau-21+9\tau-126+36\tau-7=0$$
$$49\tau=196$$
$$\tau=4$$

Man erhält nun den Punkt L:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L(13|-5|3)$$

Für den Vektor $\overrightarrow{OP^*}$ folgt dann:

$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -17 \\ 27 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^*(5|-17|27)$$

Der Richtungsvektor der Geraden h^* ist durch die Punkte P^* und S festgelegt:

$$\vec{u}_{h^*} = \overrightarrow{SP^*} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -17+1 \\ 27-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ 26 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$h^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix}$$ (mit dem Punkt S als „Aufpunkt“)

5 | 2.3 Bestimmen Sie je eine Gleichung für die beiden winkelhalbierenden Geraden w_1 und w_2 der Geraden h und h^*.

Die Winkelhalbierende w_1 ist durch die Punkte S und L festgelegt (siehe Skizze bei 2.2).

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1-13 \\ -1+5 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad w_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die zweite Winkelhalbierende w_2 ist durch den Punkt S und den Normalenvektor $\vec{n}_E$ der Ebene E bestimmt.

$$w_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

30