

Musterlösung der Abschlussprüfung 2004 BII (Technik)

1.1 $E_0: x_2 - x_3 = 0$ Wähle $x_3 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2 = \lambda$

$E_1: x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 + \lambda - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2 $E_k \parallel g_k \Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \perp g_k \Leftrightarrow \vec{n}_{E_k} \cdot \begin{pmatrix} k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Also muss gelten:

$$\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} = k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow k_{\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

1.3 $F: \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{n}_F$

$$F: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x_1 - x_2 = 0$$

Die Ebene F enthält die x_3 -Achse.

1.4
$$\left| \frac{\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{k^2+2} \cdot \sqrt{1+1}} \right| = \left| \frac{k-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2+2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$$

$$\frac{k-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2+2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{k^2 - 2k + 1}{k^2 + 2} = 1$$

$$k^2 - 2k + 1 = k^2 + 2$$

$$-2k = 1$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

$$1.5 \quad \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow \text{HNF von } F: \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) = 0$$

$$d(F; s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 - \lambda) = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \mp 2 = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

$$A(2|0|0) \text{ und } B(2|4|4)$$

1.6 Der Punkt $A(2|0|0)$ hat von der Ebene F den Abstand $\sqrt{2}$ (siehe 1.5). Man benötigt nun einen Spiegelpunkt A' , der spiegelbildlich zu A bezüglich der Ebene F liegt. Dieser Punkt A' liegt allgemein auf der Geraden

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Diesen Punkt setzt man in seiner allgemeinen}$$

Form in die HNF von F ein:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \mu + \mu) = \pm\sqrt{2}$$

$$2 + 2\mu = \pm 2$$

$$\mu = \pm 1 - 1$$

$$\mu_{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

$\mu_1 = 0$ liefert den schon bekannten Punkt $A(2|0|0)$

$\mu_2 = -2$ liefert den Punkt $A'(0|2|0)$ der spiegelbildlich zu A bezüglich der Ebenen F liegt.

Man benötigt nun noch den Schnittpunkt S der Ebene F mit der Geraden s . Dazu setzt man s in F ein:

$$2\lambda = 0$$

$$\lambda = 0$$

$$\Rightarrow S(2|2|2)$$

Die gesuchte Gerade h verläuft durch die Punkte S und A'

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-2 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2.1 Damit die drei Vektoren keine Basis des \mathbb{R}^3 bilden, muss der Rang der Matrix kleiner als 3 sein.

Also $t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0 \vee t_2 = 1$

Da aber $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt:

Für $t=1$ bilden die drei Vektoren keine Basis des \mathbb{R}^3

+ +

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 1 & 1 & & & \\
 0 & t-1 & 1+t^2 & & & \\
 t & 1 & -1 & & & \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & & & \\
 0 & t-1 & 1+t^2 & & & \\
 0 & t-1 & t+1 & & & \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & & & \\
 0 & t-1 & 1+t^2 & & & \\
 0 & 0 & t^2-t & & &
 \end{array}$$

$\cdot t$ $\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} -$
 $\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} -$ + + +

2.2 Führt man mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ die entsprechenden Umformungen durch wie

in 2.1, so erhält man für $t = -1$ die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix: +

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & -2 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & 2
 \end{array}
 \Rightarrow \lambda = -2 \quad \Rightarrow \mu = 1 \quad \Rightarrow \tau = 1$$

+ + +

+