

2013 A II Lösung

1.1 $f(x) = x^2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) = 0$

$x = 0 \notin \mathbb{D}_f \quad \ln(0,25 \cdot x) = 0 \Rightarrow 0,25 \cdot x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 4}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^2}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\ln(0,25 \cdot x)}_{\rightarrow -\infty} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\ln(0,25 \cdot x)}^{\rightarrow -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0,25}{-2 \cdot \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x^2}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\ln(0,25 \cdot x)}_{\rightarrow \infty} \rightarrow \infty$$

1.2 $f'(x) = 2x \cdot \ln(0,25 \cdot x) + x^2 \cdot \frac{0,25}{0,25 \cdot x} = 2x \cdot \ln(0,25 \cdot x) + x = x \cdot (2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) + 1) = 0$

$x = 0 \notin \mathbb{D}_f$

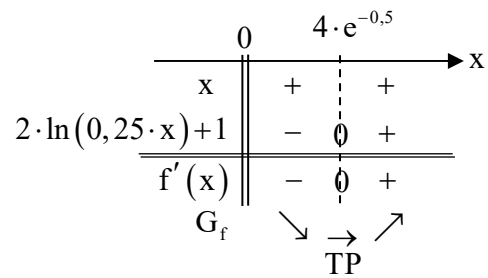
$2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln(0,25 \cdot x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 0,25 \cdot x = e^{-0,5} \Rightarrow x_1 = 4 \cdot e^{-0,5}$

$$f(4 \cdot e^{-0,5}) = (4 \cdot e^{-0,5})^2 \cdot \ln(0,25 \cdot 4 \cdot e^{-0,5})$$

$$= 16 \cdot e^{-1} \cdot (-\frac{1}{2}) = -8 \cdot e^{-1}$$

TP $(4 \cdot e^{-0,5} | -8 \cdot e^{-1})$

gerundet: TP $(2,43 | -2,94)$



1.3 $f''(x) = 1 \cdot (2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) + 1) + x \cdot 2 \cdot \frac{0,25}{0,25 \cdot x} = 2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) + 1 + 2$

$f''(x) = 2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) + 3 = 0 \Rightarrow \ln(0,25 \cdot x) = -1,5 \Rightarrow x = 4 \cdot e^{-1,5}$

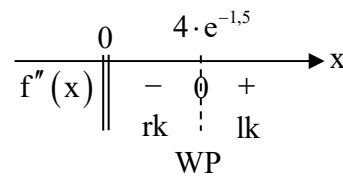
G_f ist rechtsgekrümmt in $]0; 4 \cdot e^{-1,5}[$

G_f ist linksgekrümmt in $[4 \cdot e^{-1,5}; \infty[$

$$f(4 \cdot e^{-1,5}) = (4 \cdot e^{-1,5})^2 \cdot \ln(0,25 \cdot 4 \cdot e^{-1,5})$$

$$= 16 \cdot e^{-3} \cdot (-1,5) = -24 \cdot e^{-3}$$

WP $(4 \cdot e^{-1,5} | -24 \cdot e^{-3})$ gerundet: WP $(0,89 | -1,19)$



1.4 $f(x) = 2,5$

$x^2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) = 2,5$

$x^2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) - 2,5 = 0$

Setze: $h(x) = x^2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) - 2,5$

mit: $h'(x) = x \cdot (2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) + 1)$

$x_0 = 4,5$

$x_1 = 4,5 - \frac{h(4,5)}{h'(4,5)}$

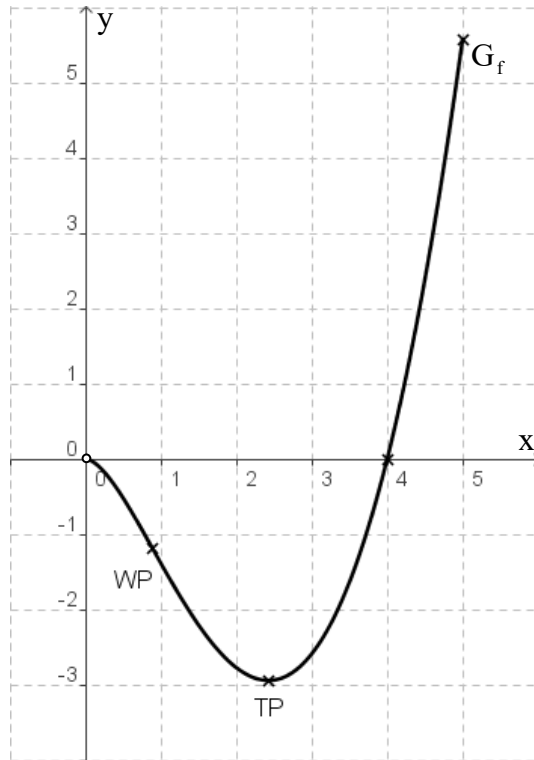
$x_1 = 4,5 - \frac{-0,1149}{5,5600} \approx 4,52$

$$1.5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x \cdot (2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) + 1)}_{\rightarrow -\infty} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) + 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{0,25}{0,25 \cdot x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x) = 0$$

Der Graph G_f läuft von rechts her kommend ($x > 0$) waagrecht in den Koordinatenursprung (erreicht diesen aber nicht).

1.6

x	y
0,5	-0,52
1	-1,37
1,5	-2,21
2	-2,77
2,5	-2,94
3	-2,59
3,5	-1,64
4	0
4,5	2,39
5	5,58

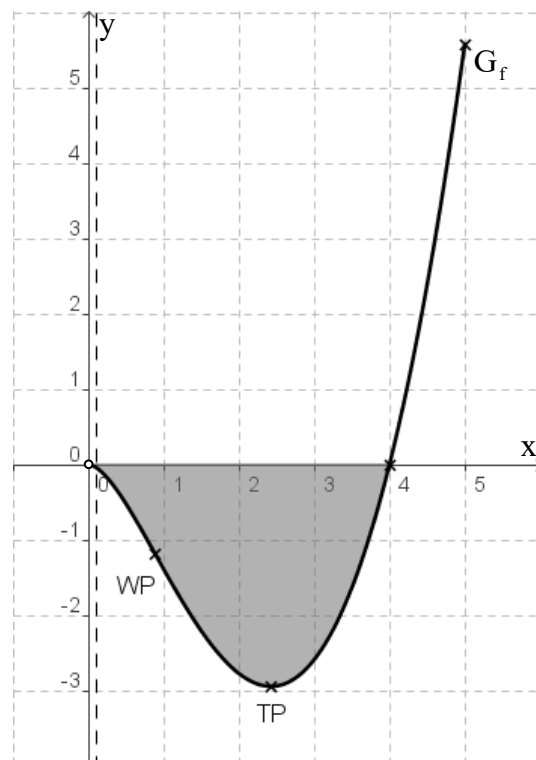


$$1.7 \quad F'(x) = x^2 \cdot \left[\ln(0,25 \cdot x) - \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{0,25}{0,25 \cdot x} = x^2 \cdot \left[\ln(0,25 \cdot x) - \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{3} x^2 = x^2 \cdot \left[\ln(0,25 \cdot x) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = x^2 \cdot \ln(0,25 \cdot x) = f(x)$$

Somit ist $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$.

1.8

$$\begin{aligned} A &= \int_4^{0,1} f(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \cdot \left(\ln(0,25 \cdot x) - \frac{1}{3} \right) \right]_4^{0,1} \\ &= \frac{1}{3000} \cdot \left(\ln(0,025) - \frac{1}{3} \right) - \frac{64}{3} \cdot \left(\ln(1) - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{\ln(0,025)}{3000} - \frac{1}{9000} + \frac{64}{9} \\ &= \frac{\ln(0,025)}{3000} + \frac{7111}{1000} \approx 7,11 \end{aligned}$$



$$2.1 \quad v(5) = 60 \cdot \frac{e^{\frac{5}{3}} - 1}{e^{\frac{5}{3}} + 1} \approx 40,9$$

$$v(t) = 55$$

$$60 \cdot \frac{e^{\frac{t}{3}} - 1}{e^{\frac{t}{3}} + 1} = 55$$

$$e^{\frac{t}{3}} - 1 = \frac{11}{12} \cdot \left(e^{\frac{t}{3}} + 1 \right)$$

$$e^{\frac{t}{3}} - 1 = \frac{11}{12} \cdot e^{\frac{t}{3}} + \frac{11}{12}$$

$$\frac{1}{12} \cdot e^{\frac{t}{3}} = \frac{23}{12}$$

$$e^{\frac{t}{3}} = 23$$

$$\frac{t}{3} = \ln(23)$$

$$t = 3 \cdot \ln(23) \approx 9,4$$

$$2.2 \quad \dot{v}(t) = 60 \cdot \frac{\left(e^{\frac{t}{3}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{3} e^{\frac{t}{3}} - \left(e^{\frac{t}{3}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{3} e^{\frac{t}{3}}}{\left(e^{\frac{t}{3}} + 1 \right)^2} = 60 \cdot \frac{\frac{1}{3} e^{\frac{t}{3}} \cdot \left(e^{\frac{t}{3}} + 1 - e^{\frac{t}{3}} + 1 \right)}{\left(e^{\frac{t}{3}} + 1 \right)^2} = 60 \cdot \frac{\frac{2}{3} e^{\frac{t}{3}}}{\left(e^{\frac{t}{3}} + 1 \right)^2}$$

$$\dot{v}(t) = 40 \cdot \frac{\overset{>0}{e^{\frac{t}{3}}}}{\underbrace{\left(e^{\frac{t}{3}} + 1 \right)^2}_{>0}} > 0 \Rightarrow \text{Die Geschwindigkeit } v \text{ ist streng monoton zunehmend.}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 60 \cdot \frac{\overset{\rightarrow \infty}{e^{\frac{t}{3}} - 1}}{\underbrace{e^{\frac{t}{3}} + 1}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} 60 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \overset{t}{e^{\frac{t}{3}}}}{\frac{1}{3} \cdot \overset{t}{e^{\frac{t}{3}}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} 60 = 60$$

Die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers nähert sich dem Wert $60 \frac{m}{s}$ (erreicht sie aber nicht).

$$2.3 \quad \dot{v}(0) = 40 \cdot \frac{e^0}{\left(e^0 + 1 \right)^2} = 40 \cdot \frac{1}{2^2} = 10$$

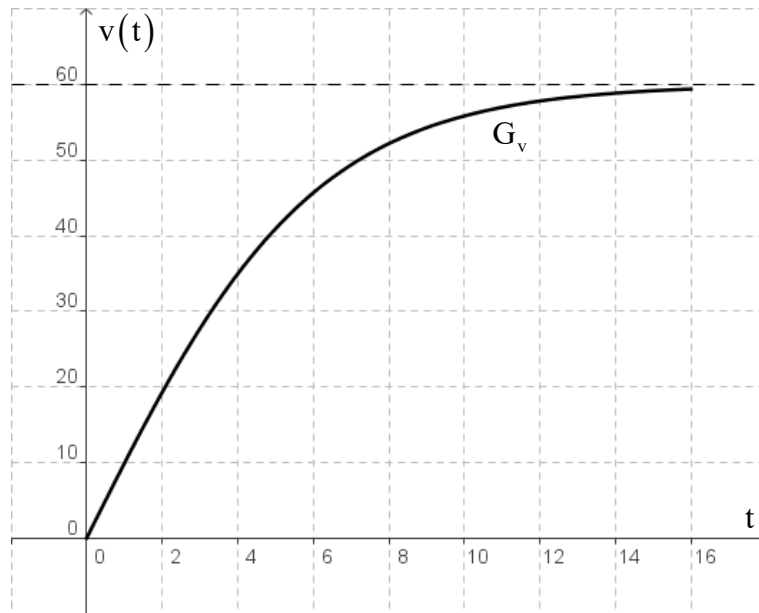
Da $\ddot{v} < 0$ ist \dot{v} streng monoton abnehmend für $t > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{v}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 40 \cdot \frac{\overset{\rightarrow \infty}{e^{\frac{t}{3}}}}{\underbrace{\left(e^{\frac{t}{3}} + 1 \right)^2}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} 40 \cdot \frac{\frac{1}{3} e^{\frac{t}{3}}}{2 \cdot \left(e^{\frac{t}{3}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{3} e^{\frac{t}{3}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} 20 \cdot \frac{1}{\underbrace{e^{\frac{t}{3}} + 1}_{\rightarrow \infty}} = 0$$

Somit folgt für die Wertemenge: $W_{\dot{v}} =]0;10]$

2.4

t	v
0	0
2	19
4	35
6	46
8	52
10	56
12	57
14	58
16	59



2.5

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= 360 \cdot \frac{2}{e^{\frac{t}{6}} + e^{-\frac{t}{6}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} e^{\frac{t}{6}} - \frac{1}{6} e^{-\frac{t}{6}} \right) = 60 \cdot \frac{e^{\frac{t}{6}} - e^{-\frac{t}{6}}}{e^{\frac{t}{6}} + e^{-\frac{t}{6}}} = 60 \cdot \frac{(e^{\frac{t}{6}} - e^{-\frac{t}{6}}) \cdot e^{\frac{t}{6}}}{(e^{\frac{t}{6}} + e^{-\frac{t}{6}}) \cdot e^{\frac{t}{6}}} \\ &= 60 \cdot \frac{e^{\frac{t}{3}} - e^0}{e^{\frac{t}{3}} + e^0} = 60 \cdot \frac{e^{\frac{t}{3}} - 1}{e^{\frac{t}{3}} + 1} = v(t) \end{aligned}$$

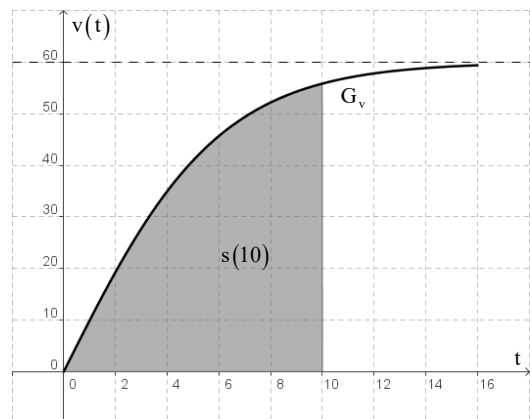
Somit ist $s(t)$ Stammfunktion von $v(t)$.

$$s(0) = 360 \cdot \ln\left(\frac{e^0 + e^0}{2}\right) = 360 \cdot \ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0$$

$$s(10) = 360 \cdot \ln\left(\frac{e^{\frac{10}{6}} + e^{-\frac{10}{6}}}{2}\right) = 360 \cdot \ln\left(\frac{e^{\frac{5}{3}} + e^{-\frac{5}{3}}}{2}\right) \approx 363,1$$

$$\text{Da } \int_0^{10} v(t) dt = [s(t)]_0^{10} = s(10) - s(0) = s(10)$$

gibt $s(10)$ den in den ersten 10 Sekunden durchfallenen Höhenunterschied von 363,1m an.



2.6

$$s(t) = 4000 - 1000$$

$$360 \cdot \ln\left(\frac{e^{\frac{t}{6}} + e^{-\frac{t}{6}}}{2}\right) = 3000 \quad \text{mit } e^{-\frac{t}{6}} \approx 0$$

$$\ln\left(\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{t}{6}}\right) = \frac{25}{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{t}{6}} = e^{\frac{25}{3}}$$

$$e^{\frac{t}{6}} = 2 \cdot e^{\frac{25}{3}}$$

$$\frac{t}{6} = \ln\left(2 \cdot e^{\frac{25}{3}}\right)$$

$$t = 6 \cdot \ln\left(2 \cdot e^{\frac{25}{3}}\right) \approx 54,2$$

Da $e^{-\frac{54,2}{6}} = 1,2 \cdot 10^{-4} \approx 0$ (sehr klein ist), kann der Term $e^{-\frac{t}{6}} = 0$ gesetzt werden.